

Appunti di Analisi Matematica 2  
Corso dei proff. Matteo Novaga & Carlo Carminati

Lorenzo Contorni, Francesco Sorce

Università di Pisa  
Dipartimento di Matematica  
A.A. 2022/2023

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami e complementi di Topologia</b>	<b>4</b>
1.1	Spazi metrici . . . . .	4
1.1.1	Norme $p$ . . . . .	5
1.2	Topologia . . . . .	8
1.3	Successioni convergenti e insiemi compatti . . . . .	10
1.3.1	Insiemi compatti . . . . .	10
1.3.2	Completezza . . . . .	12
1.4	Funzioni continue . . . . .	12
1.4.1	Funzioni Lipschitziane . . . . .	13
1.4.2	Distanza punto-insieme e intorni tubolari . . . . .	14
1.4.3	Compatti in spazio metrico . . . . .	15
1.4.4	Equivalenza delle norme su spazi reali a dimensione finita . . . . .	16
1.4.5	Compatti nello spazio delle funzioni continue su compatto . . . . .	17
1.5	Spazi di successioni con norma $p$ . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Calcolo Differenziale</b>	<b>22</b>
2.1	Continuità su spazi a più dimensioni . . . . .	22
2.2	Differenziabilità . . . . .	23
2.2.1	Funzioni da spazi reali a spazi reali in più dimensioni . . . . .	24
2.3	Derivate successive e Taylor . . . . .	27
2.3.1	Formula di Taylor . . . . .	29
2.4	Massimi e minimi locali . . . . .	30
2.5	Invertibilità locale e teorema di Dini . . . . .	32
2.6	Massimi e minimi vincolati . . . . .	36
2.6.1	Sottovarietà . . . . .	36
2.6.2	Sistema dei moltiplicatori di Lagrange . . . . .	38
2.7	Funzioni Omogenee e Radiali . . . . .	41
2.8	Insiemi convessi . . . . .	44
2.9	Retta di regressione (minimi quadrati) . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Teoria della Misura e Calcolo Integrale</b>	<b>50</b>
3.1	Teoria della Misura . . . . .	50
3.1.1	Metodo di Carathéodory . . . . .	52
3.1.2	Misura di Lebesgue . . . . .	53
3.2	Complementi a teoria della misura . . . . .	56
3.2.1	Esempi patologici in Teoria della Misura . . . . .	56
3.2.2	Misure regolari . . . . .	59
3.3	Integrazione in spazi di misura . . . . .	62
3.3.1	Funzioni misurabili . . . . .	62
3.3.2	Integrale di Lebesgue . . . . .	64
3.3.3	Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale . . . . .	67
3.3.4	Misure prodotto . . . . .	71
3.3.5	Sezioni e Fubini-Tonelli . . . . .	72
3.3.6	Operatori di composizione . . . . .	75

3.3.7	Teorema del cambio di variabile . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Funzioni integrabili e serie di Fourier</b>	<b>83</b>
4.1	Spazi di funzioni integrabili . . . . .	83
4.1.1	Assoluta continuità dell'integrale . . . . .	83
4.1.2	Funzioni p-integrabili . . . . .	84
4.1.3	Funzioni continue a supporto compatto . . . . .	87
4.1.4	Controesempi con integrabili / a supporto compatto . . . . .	91
4.2	Serie di Fourier . . . . .	92
4.2.1	Spazi di Hilbert . . . . .	92
4.2.2	Definizione ed Esistenza . . . . .	93
4.2.3	Serie di Fourier Reale . . . . .	98
4.2.4	Convergenza uniforme delle serie di Fourier . . . . .	99
4.2.5	Serie di Fourier su più dimensioni . . . . .	104
4.3	Convoluzioni . . . . .	105
4.3.1	Mollificatori . . . . .	108
4.4	Nozioni pratiche varie sugli integrali . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Integrazione su k-Superfici e Forme</b>	<b>113</b>
5.1	Curve su spazi reali . . . . .	113
5.1.1	Riparametizzazioni . . . . .	114
5.1.2	Giunzione di curve, omotopia e gruppo fondamentale . . . . .	115
5.1.3	Lunghezza di una curva . . . . .	116
5.2	Integrazione lungo curve . . . . .	118
5.2.1	1-Forme differenziali . . . . .	119
5.2.2	Forme Esatte e Chiuse . . . . .	120
5.2.3	Casi in cui Chiusa implica Esatta . . . . .	122
5.3	Teorema di Gauss-Green . . . . .	124
5.4	Forme particolari . . . . .	129
5.4.1	Forme del piano meno l'origine . . . . .	130
5.5	K-Superfici e Misure di Hausdorff . . . . .	132
5.6	Teorema della Divergenza . . . . .	136
5.6.1	Integrali di armoniche su palle . . . . .	139
5.7	Integrali su superfici nello spazio tridimensionale . . . . .	143
5.7.1	Teorema di Stokes . . . . .	144
5.7.2	Nabla-calcolo . . . . .	146
5.8	K-Forme differenziali su spazi reali . . . . .	149
5.8.1	Pullback di una Forma differenziale . . . . .	152
5.8.2	K-Superfici Orientabili . . . . .	152
5.8.3	Integrale di k-Forme su k-superfici orientabili e Stokes . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Equazioni Differenziali ordinarie</b>	<b>155</b>
6.1	Esistenza e unicità e Soluzioni Massimali . . . . .	155
6.1.1	Soluzioni Massimali . . . . .	157
6.1.2	Dipendenza continua dal dato iniziale . . . . .	160
6.2	Sistemi Lineari . . . . .	161
6.2.1	Caso lineare a coefficienti costanti . . . . .	162
6.2.2	Sistemi lineari (non a coefficienti costanti) . . . . .	167
6.3	Sistemi autonomi . . . . .	168
6.3.1	Traiettorie . . . . .	168
6.3.2	Punti stazionari e di equilibrio . . . . .	171
6.3.3	Sistema linearizzato . . . . .	174
6.3.4	Sistemi bidimensionali autonomi . . . . .	176

<b>7</b>	<b>Misure e distanza di Hausdorff</b>	<b>178</b>
7.1	Misure di Hausdorff . . . . .	178
7.1.1	Integrazione . . . . .	181
7.2	Distanza di Hausdorff . . . . .	181
7.3	Dimensione di Hausdorff e Frattali . . . . .	184
7.3.1	Sistemi di Funzioni iterate . . . . .	185
<b>A</b>	<b>Riconoscimenti</b>	<b>187</b>

# Capitolo 1

## Richiami e complementi di Topologia

### 1.1 Spazi metrici

**Definizione 1.1** (Spazio metrico).

$(X, d)$  è uno **spazio metrico** se  $X$  è un insieme e  $d$  è una **distanza** su  $X$ , cioè è una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  tale che:

- $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$  (*disuguaglianza triangolare*).

L'idea è quella di costruire uno spazio sul quale possiamo misurare una distanza tra due oggetti, replicando una misurazione in un piano euclideo, dunque una distanza pesca due oggetti da  $X$  e restituisce un certo numero positivo che indica “quanto sono lontani” uno dall'altro.

*Osservazione 1.2.*

Se  $Y \subseteq X$ , dove  $X$  è uno spazio metrico con la distanza  $d$ , allora  $(Y, d|_Y)$  è ancora uno spazio metrico.

Una classe importante di spazi metrici sono gli **spazi normati**. Vale dunque la seguente:

**Definizione 1.3** (Spazio normato).

Si definisce spazio normato  $(V, \|\cdot\|)$  uno *spazio vettoriale*  $V$  sul quale è definita una funzione **norma**  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$  tale che:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$
- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

Si osserva subito che lo spazio  $(V, d_{\|\cdot\|})$  è metrico con la distanza indotta dalla norma, cioè la distanza definita come  $d_{\|\cdot\|}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ .

Inoltre è importante fare una distinzione: mentre una distanza è il modulo del vettore congiungente  $x$  ed  $y$  la norma è la lunghezza del vettore  $\mathbf{x}$  in  $V$ .

### 1.1.1 Norme p

Facciamo qualche esempio di spazio normato ricorrente nel nostro corso:

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ , con  $p \geq 1$ , dove, preso  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , definiamo  $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ .
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ , dove, preso  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , definiamo  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$ .
- $(C([a, b]), \|f\|_p)$  dove definiamo:

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ è continua}\};$$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} & p \geq 1 \\ \max_{x \in [a, b]} |f(x)| & p = \infty \end{cases}.$$

Mostriamo ora che le due norme  $p$  appena definite rispettano effettivamente la definizione di norma data. Ci serviranno i seguenti:

**Definizione 1.4** (Funzione convessa (versione con combinazione)).

Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $I$  è un intervallo su  $\mathbb{R}$ , si dice **convessa** se:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1].$$

Il valore  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  è detto **combinazione convessa**.

**Definizione 1.5** (Prodotto scalare).

Dati  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  si definisce **prodotto scalare (canonico)** di  $\mathbf{x}$  per  $\mathbf{y}$  l'operazione

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

dove le  $x_i$  sono le componenti del vettore  $\mathbf{x}$  e le  $y_i$  le componenti del vettore  $\mathbf{y}$ .

**Lemma 1.6** (Disuguaglianza di Young).

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ , e  $\forall p, q > 0$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  si ha

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

*Dimostrazione.*

La funzione  $f(x) = e^x$  ha derivata seconda sempre positiva dunque è convessa, quindi possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p)} e^{\frac{1}{q}\ln(b^q)} = \\ &= e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \leq \frac{1}{p}e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(b^q)} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \end{aligned}$$

□

**Lemma 1.7** (Disuguaglianza di Hölder).

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , dati  $p, q > 0$  tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , si ha che

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$

*Dimostrazione.*

Facciamo vedere che vale la disuguaglianza:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$$

da cui, dividendo componente per componente:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq 1.$$

Questa è una somma di prodotti, dunque possiamo sfruttare la disuguaglianza di Young per ricavare:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|x_i|^p}{p \|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{|y_i|^q}{q \|\mathbf{y}\|_q^q} \right).$$

Da cui, estraendo dal simbolo di sommatoria i valori indipendenti da  $i$  e spezzando la somma al secondo membro, si ottiene:

$$\frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q}.$$

Adesso basta osservare che i termini al numeratore delle due frazioni precedenti sono, per definizione, la potenza delle norme  $p$  e  $q$ , rispettivamente, di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , dunque i termini si semplificano, lasciando:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

per ipotesi. Dunque, per disuguaglianza triangolare, concludiamo che:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

□

**Proposizione 1.8** (Le norme- $p$  sono norme).

$\|\mathbf{x}\|_p$  e  $\|\mathbf{x}\|_\infty$  sono norme su  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.*

Dobbiamo verificare che le due espressioni rispettino le proprietà di norma definite precedentemente.

Per come sono definite si osserva subito che le prime due proprietà della definizione sono verificate.

Restano da provare le due subaddittività.

Per  $p = \infty$  la prova è immediata, poiché il massimo di una somma è sempre minore della somma dei massimi.

Supponiamo allora  $p \geq 1$  finito. Avremo allora che:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Vogliamo ora applicare la disuguaglianza di Hölder all'ultimo termine: per farlo possiamo distribuire il prodotto, spezzare la somma e dunque applicare la disuguaglianza, prendendo come primo termine la norma  $p$  data dagli  $x_i$  (e rispettivamente dagli  $y_i$  per

la seconda somma) e come secondo termine della disuguaglianza la norma  $q$  degli  $x_i + y_i$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1} &= \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \\ &\leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left\| \begin{pmatrix} |x_1 + y_1|^{p-1} \\ \vdots \\ |x_n + y_n|^{p-1} \end{pmatrix} \right\|_q \stackrel{p-1 \equiv p/q}{=} \\ &= (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \left( \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p/q})^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p/q} = (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo ricavato che:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^p \leq (\|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p) \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}.$$

Se  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = 0$  la tesi è immediata. Altrimenti possiamo semplificare per  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p^{p-1}$  e ricavare

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p,$$

che è la disuguaglianza conclusiva che volevamo provare. □

**Proposizione 1.9** (Ordine delle norme).

La mappa:

$$p \mapsto \|\cdot\|_p$$

è debolmente decrescente.

*Dimostrazione.*

Per le proprietà delle norme basta mostrare il caso in cui  $\|\mathbf{x}\|_p = 1$  per qualche  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Vogliamo dunque mostrare che se  $p' > p$  allora  $\|\mathbf{x}\|_{p'} \leq 1$ .

Per definizione si ha:

$$\|\mathbf{x}\|_{p'} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p'}} = 1^{p'/p} = 1,$$

infatti, poiché  $\|\mathbf{x}\|_p = 1 \implies |x_i| \leq 1$  per ogni  $i$ , e  $p' > p$ , si ha  $|x_i|^{p'} \leq |x_i|^p$ . □

**Proposizione 1.10.**

$\forall n \in \mathbb{N}$  valgono le seguenti disuguaglianze:

- $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$ ;
- $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2$ .

*Dimostrazione.*

\*) Osserviamo che vale la relazione:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

infatti ricordiamo che  $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ;

\*) Ricordiamo che  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i = \mathbf{x} \cdot \sigma$ , dove indichiamo con  $\sigma_i$  i segni di ciascun  $x_i$ ; a questo punto, per la **Disuguaglianza di Hölder**, abbiamo che  $\mathbf{x} \cdot \sigma \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\sigma\|_2$

e, siccome  $\|\sigma\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n (\pm 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$ , si ha la disuguaglianza voluta. □

*Osservazione 1.11.*

Osserviamo che, applicando le disuguaglianze appena dimostrate alle palle  $B_1(r)$ ,  $B_p(r)$ ,  $B_\infty(r)$ ,  $B_1(\sqrt{nr})$ ,  $B_2(r)$ ,  $B_\infty\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)$ , (dove indichiamo, con un leggero abuso di notazione, le norme utilizzate con i pedici), si hanno le seguenti inclusioni:

$$B_1(r) \subset B_p(r) \subset B_\infty(r).$$

$$B_\infty\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right) \subset B_2(r) \subset B_1(\sqrt{nr}).$$

Mostreteremo in realtà che per ogni norma definita su  $\mathbb{R}^n$  si hanno questo tipo di inclusioni, più precisamente vedremo che le norme su  $\mathbb{R}^n$  sono topologicamente equivalenti.

## 1.2 Topologia

**Definizione 1.12** (Palla topologica).

Dato uno spazio metrico  $(X, d)$  ed un numero reale positivo  $r$  si chiama **palla aperta** di centro  $x_0 \in X$  l'insieme:

$$B_r(x_0) = \{y \in X : d(x_0, y) < r\}.$$

Una **palla chiusa** di centro  $x_0$  è una palla aperta unita al suo bordo, cioè l'insieme:

$$\overline{B}_r(x_0) = \{y \in X : d(x_0, y) \leq r\}.$$

**Definizione 1.13** (Insieme aperto e intorno).

Dato uno spazio metrico  $(X, d)$  un suo sottoinsieme  $A$  si dice **aperto** se:

$$\forall x_0 \in A \quad \exists r > 0 : B_r(x_0) \subseteq A.$$

Un qualsiasi sottoinsieme  $U$  di  $X$  è un **intorno** di  $x_0$  se contiene un aperto contenente anche  $x_0$ .

Il complementare di un insieme aperto si chiama **insieme chiuso**.

*Osservazione 1.14.*

Un insieme non è necessariamente solo aperto o solo chiuso, ad esempio l'intero spazio metrico  $X$  è aperto (poiché ogni  $x \in X$  può essere considerato il centro di una palla aperta), ma è anche chiuso (poiché il suo complementare  $\emptyset$  è aperto).

**Proposizione 1.15** (Proprietà degli aperti).

Sia  $\mathfrak{F}$  una famiglia di insiemi aperti. Allora valgono le seguenti proprietà:

- $\bigcup_{A \in \mathfrak{F}} A$  è un insieme aperto;
- Se il numero di insiemi intersecati è finito allora  $\bigcap_{A \in \mathfrak{F}} A$  è un insieme aperto.

*Dimostrazione.*

★) Per ogni  $A \in \mathfrak{F}$  ed un  $x \in A$  si avrà un  $r > 0$  tale che la palla centrata in  $x$  di raggio  $r$  è interamente contenuta in  $A$ ; allora a maggior ragione la palla sarà interamente contenuta nell'unione di tutti gli altri insiemi della famiglia, qualunque cardinalità abbia quest'ultima.

★) Cominciamo con due insiemi della famiglia:  $A$  e  $B$ ; consideriamo un  $x$  appartenente ad  $A \cap B$ :  $A$  e  $B$  sono aperti, per cui esisteranno due valori reali,  $r_1$  ed  $r_2$ , tali che la

palla centrata in  $x$  di raggio  $r_1$  è interamente contenuta in  $A$ , mentre la palla centrata in  $x$  di raggio  $r_2$  è interamente contenuta in  $B$ . Senza perdita di generalità supponiamo  $r_1 \leq r_2$ . Si avrà che

$$A \supseteq B_{r_1}(x) \subseteq B_{r_2}(x) \subseteq B,$$

ovvero  $B_{r_1}(x) \subseteq A \cap B$ . Essendo  $x$  un generico punto di  $A \cap B$  ricaviamo che  $A \cap B$  è aperto. Procedendo per induzione ricaviamo che l'intersezione di un certo numero finito di insiemi aperti è ancora aperta.

Viceversa, se consideriamo un'infinità di insiemi aperti non potremo più essere certi che la loro intersezione sia aperta: ad esempio la successione  $B_{1+\frac{1}{n}}(x)$  tende alla palla unitaria  $B_1(x)$ , che è chiusa. Invece possiamo costruire intersezioni di un numero infinito di aperti che sono ancora aperte.  $\square$

Per passaggio al complementare valgono le seguenti:

**Proposizione 1.16** (Proprietà dei chiusi).

Sia  $\mathfrak{A}$  una famiglia di insiemi chiusi. Allora valgono le seguenti proprietà:

- se  $\mathfrak{A}$  è finita allora  $\bigcup_{B \in \mathfrak{A}} B$  è un insieme chiuso;
- per ogni  $\mathfrak{A}$ ,  $\bigcap_{B \in \mathfrak{A}} B$  è un insieme chiuso.

In realtà le proprietà dimostrate sopra ci permettono di astrarre il concetto di insiemi aperti e chiusi oltre quello di spazi metrici.

**Definizione 1.17** (Topologia).

Dato un insieme  $X$ , un insieme di suoi sottoinsiemi  $T$  è detto **topologia** se

1.  $\emptyset, X \in T$ ;
2. Data  $\mathfrak{J} \subseteq T$ ,  $\bigcup_{A \in \mathfrak{J}} A \in T$ ;
3. Data  $\mathfrak{J} \subseteq T$  tale che  $|\mathfrak{J}| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\bigcap_{A \in \mathfrak{J}} A \in T$ .

Gli elementi di  $T$  sono detti **insiemi aperti** e uno spazio dotato della sua topologia è detto **spazio topologico**.

*Osservazione 1.18.*

Una palla aperta non è nient'altro che un intorno sferico del suo centro, infatti ogni palla aperta contiene se stessa, dunque è un elemento della topologia dello spazio che contiene il suo centro.

Dunque, finché faremo riferimento ad uno spazio metrico, potremo utilizzare indistintamente la parola palla o la parola intorno.

Più in generale, se esiste una nozione di distanza su uno spazio si può richiedere semplicemente che un sottoinsieme dello spazio contenga una palla affinché questo sottoinsieme sia un intorno del centro di quest'ultima.

*Osservazione 1.19* (Forma delle sfere in norma  $p$ ).

Con la nozione di palla è possibile giustificare perché una norma  $p$  richiede che  $p$  sia maggiore o uguale ad 1.

Ad ogni norma si può associare una **sfera unitaria**, cioè una palla formata da tutti i vettori dello spazio di norma 1. Chiaramente al variare della norma varia anche la forma della palla, dunque dalla forma di quest'ultima si possono ricavare informazioni relative alle proprietà dello spazio.

Ora, per la definizione data di norma, essa deve rispettare la disuguaglianza triangolare, il che equivale a dire che la sfera unitaria associata deve essere convessa.

Considerando le norme  $\|\cdot\|_p$  nello spazio  $R^n$ :

- Nel caso  $p = 1$  la sfera unitaria si riduce al quadrato verticale formato dai segmenti ottenuti ruotando la retta  $\mathbf{y} = 1 - \mathbf{x}$  nell'intervallo  $[-1, 1]^n$ .
- Quando  $p = 2$  la sfera diventa il cerchio dello spazio euclideo
- Per  $p > 2$  la sfera avrà spigoli sempre più pronunciati, fino a degenerare in un quadrato nel caso  $p = \infty$ .
- Quando  $p$  diventa minore di 1 la palla assume una forma come quella in (figura) che non è convessa e quindi non rispetta la definizione di norma, in quanto non vale la disuguaglianza triangolare.

### 1.3 Successioni convergenti e insiemi compatti

**Definizione 1.20** (Successione convergente).

Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in uno spazio metrico  $(X, d)$  si dice **convergente** ad un valore  $x$  (e scriviamo  $x_n \rightarrow x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  o anche solo  $\lim x_n = x$ ) se:

- $\forall U$  intorno di  $x \exists n_0 : x_n \in U \quad \forall n > n_0$ ;
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : x_n \in B_\varepsilon(x) \quad \forall n > n_\varepsilon$ .

*Osservazione 1.21.*

Si ha che  $x_n \rightarrow x$  se e solo se  $\lim d(x_n, x) = 0$

**Definizione 1.22** (Successione uniformemente convergente).

Dato uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$ , una successione di funzioni  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a valori in  $X$  **converge uniformemente** a  $f$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tale che, } \forall n > N \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

**Proposizione 1.23** (Chiuso equivale a chiuso per successioni).

$C$  chiuso  $\iff \forall x_n \in C : x_n \rightarrow x, x \in C$

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Consideriamo una successione  $x_n$  in  $C$ , chiuso, convergente ad un certo  $x$  e supponiamo, *per assurdo*, che  $x \in A = C^c$ :  $A$  è aperto, in quanto complementare di  $C$ , allora, per definizione,  $\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq A$ , ma allora, per definizione di successione convergente, deve aversi anche che  $x_n \in A$  e questo è assurdo perché supponevamo  $x_n \in C$ .  $\nexists$

$\impliedby$ ) Supponiamo, *per assurdo*, che  $C$  sia un insieme non chiuso e che ogni successione  $x_n$  in esso contenuta converga ad un punto  $x$  anch'esso in  $C$ ; avremo che l'insieme  $A = X \setminus C$ , dove  $X$  è l'insieme ambiente, non è aperto, quindi esiste un  $x$  in  $A$  tale che, comunque scelto un  $r > 0$ ,  $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ ; a questo punto osserviamo che la successione definita dai punti  $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C$  è, per quanto osservato, una successione in  $C$  che converge ad  $x$ , ma, per ipotesi, questo  $x$  deve stare anch'esso in  $C$  e questo è assurdo, poiché avevamo supposto  $x \in A$ .  $\nexists$  □

#### 1.3.1 Insiemi compatti

**Teorema 1.24** (Teorema di Bolzano-Weierstrass).

*Ogni sottoinsieme infinito e limitato di  $\mathbb{R}^n$  contiene almeno un punto di accumulazione, o, equivalentemente, ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.*

**Definizione 1.25** (Spazio compatto).

Uno spazio topologico  $X$  è detto **compatto** se:

- Ogni ricoprimento aperto di  $X$  ammette un sottoricoprimento finito;

- Ogni successione  $x_n$  in  $X$  ammette una sottosuccessione  $x_{n_k}$  convergente in  $X$ .

*Osservazione 1.26.*

Negli spazi metrici le due definizioni sono equivalenti per via del **Teorema di Bolzano-Weierstrass**, tuttavia ciò non vale in spazi topologici qualsiasi, dunque la prima proprietà è detta *compattezza per ricoprimenti* (o solo *compattezza*), mentre la seconda *compattezza per successioni*.

**Teorema 1.27** (Teorema di Heine-Borel).

$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $E$  compatto  $\iff E$  chiuso e limitato.

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Consideriamo una successione  $x_n \in E$  convergente ad un  $x$  in  $X$ ,  $(X, d)$  generico spazio metrico:  $E$  è compatto dunque esiste una sottosuccessione  $x_{n_k}$  convergente ad un  $y$  in  $E$ ; tuttavia, poiché  $x_{n_k}$  è una sottosuccessione, essa deve convergere allo stesso limite di  $x_n$ , dunque, per unicità del limite,  $x = y$ , ovvero  $x \in E$ , e quindi, per la proposizione precedente,  $E$  è chiuso.

Se, per assurdo,  $E$  non fosse limitato esisterebbe una qualche successione  $x_n$  interamente contenuta in  $E \setminus B_n(x)$ . Per compattezza di  $E$ , esiste una sottosuccessione  $x_{n_k}$  convergente ad un  $y \in E$ . A questo punto osserviamo che: per costruzione,  $d(x_n, x) \rightarrow +\infty$ , e inoltre, per disuguaglianza triangolare,  $d(x_{n_k}, x) \leq d(x_{n_k}, y) + d(x, y)$ , ma questo è assurdo, perché, se  $d(x_n, x) \rightarrow +\infty$  allora  $d(x_{n_k}, x) \rightarrow +\infty$ , ma  $d(x_{n_k}, y) \rightarrow 0$  e dunque  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (d(x_{n_k}, y) + d(x, y)) = d(x, y) \in \mathbb{R}$ , ovvero  $+\infty \leq d(x, y) \in \mathbb{R}$ .  $\nexists$

$\impliedby$ ) Questa implicazione è una diretta conseguenza del **Teorema di Bolzano-Weierstrass**, infatti se  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  è limitato esiste una successione  $x_n$  limitata che ammette quindi una sottosuccessione  $x_{n_k}$  convergente in  $\mathbb{R}^n$ , in particolare se  $E$  è chiuso  $x_n$  è limitata in un chiuso e dunque, per quanto detto nella proposizione precedente,  $x_{n_k}$  converge in  $E$ , ovvero  $E$  è compatto. □

*Osservazione 1.28.*

In realtà la dimostrazione fornita sopra mostra che in generale vale una versione più debole del **Teorema di Heine-Borel**: l'implicazione **“compatto  $\implies$  chiuso e limitato”** vale in generale in uno spazio metrico qualunque, ed infatti nella dimostrazione non si è utilizzata la struttura di  $\mathbb{R}^n$ , mentre l'altra implicazione fa specifico uso del **Teorema di Bolzano-Weierstrass** e dunque della struttura di  $\mathbb{R}^n$ . In spazi metrici diversi il fatto che un insieme sia chiuso e limitato non garantisce nulla sulla sua compattezza.

**Esempio 1.29** (Chiuso e limitato non compatto).

Si prenda lo spazio  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . Affermiamo che la sfera unitaria associata  $\overline{B_1} = \{f : [0, 1] \rightarrow [-1, 1], \text{continue}\}$  è chiusa e limitata ma non compatta.

*Dimostrazione.*

È chiaramente chiusa e limitata per definizione, mostriamo che non è compatta per successioni:

Consideriamo la seguente successione

$$\partial B_1 \ni f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}.$$

Se  $n \rightarrow \infty$  allora  $f_n \rightarrow 0 \forall x \in [0, 1]$ , ma  $\|f_n - 0\|_\infty = 1$ , cioè nello spazio metrico  $f_n$  non tende a 0; quindi abbiamo che  $\overline{B_1}$  e  $\partial B_1$  sono chiusi e limitati, ma non compatti. □

### 1.3.2 Completezza

**Definizione 1.30** (Successione di Cauchy).

Dato uno spazio metrico  $(X, d)$ , una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  è detta **di Cauchy** (o **fondamentale**) se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_\varepsilon.$$

**Definizione 1.31** (Spazio completo).

Uno spazio metrico  $(X, d)$  è detto **completo** se ogni successione di Cauchy converge in  $X$ .

**Definizione 1.32** (Spazio di Banach).

Uno spazio normato completo rispetto alla metrica indotta dalla norma è detto spazio **di Banach**.

**Definizione 1.33** (Spazio di Hausdorff).

Uno spazio topologico  $X$  è detto **di Hausdorff** se soddisfa la seguente proprietà (detta *assioma di separazione  $T_2$* )

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U, V \text{ intorni aperti di } x \text{ ed } y : U \cap V = \emptyset.$$

*Osservazione 1.34.*

Tutti gli spazi metrici sono spazi di Hausdorff: basta considerare palle aperte centrate nei punti e di raggio pari alla metà della distanza tra i punti.

**Lemma 1.35.**

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $X$  se si verifica una delle seguenti proprietà:

- Esistono un  $n_k$  arbitrariamente grande ed un  $\bar{x} \in X$  tali che, se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$ , allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ .
- Esiste un  $\varepsilon_k$  arbitrariamente piccolo tale che si può scegliere un  $n_k$  arbitrariamente grande tale che  $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$ .

*Dimostrazione.*

★) Sappiamo che una successione  $x_n$  è di Cauchy se, da un certo indice in poi, due valori qualsiasi di questa sono arbitrariamente vicini. Se chiamiamo questo “indice limite” con  $N$  allora, per ogni  $n > N$ ,  $d(x_n, \bar{x}) < d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon$ ; questo può essere affermato poiché, per ipotesi, si può scegliere  $n_k > n \geq N$  arbitrariamente grande, quindi porre  $d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$  e, per definizione di limite, si può porre  $d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

A questo punto abbiamo che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $N$  tale che  $d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$ , per ogni  $n > N$ , che equivale a dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ .

★) Poniamo  $N_k = \min\{N : d(x_n, x_m) < \varepsilon_k, \quad \forall n, m \geq N\}$ . Possiamo quindi scegliere  $n_k = N_k + k$ , così avremo  $n_{k+1} > n_k \geq N_k$ , da cui, per definizione,  $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \varepsilon_k$ , cioè la successione è di Cauchy.  $\square$

## 1.4 Funzioni continue

**Definizione 1.36** (Funzione continua).

Dati  $(X, d)$  e  $(Y, \bar{d})$  spazi metrici,  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione **continua** in  $x_0 \in X$  se vale la seguente implicazione:

$$x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$$

o, equivalentemente, se vale la seguente proprietà:

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(U) \subseteq V.$$

*Osservazione 1.37.*

Per spazi topologici generali le due caratterizzazioni non sono equivalenti. La prima è detta *continuità per successioni* e la seconda *continuità*.

**Definizione 1.38** (Funzione uniformemente continua).

Dati  $(X, d)$  e  $(Y, \bar{d})$  spazi metrici,  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione **uniformemente continua** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(x, y) < \delta \implies \bar{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y \in X.$$

**Teorema 1.39** (Teorema di Heine-Cantor).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico compatto e  $f$  una funzione continua su di esso allora  $f$  è uniformemente continua.

**Teorema 1.40** (Teorema di Weierstrass).

Data  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $(X, d)$  compatto, continua,  $\exists m, M \in \mathbb{R}$  tale che  $m$  è un punto di minimo assoluto per  $f$  e  $M$  è un punto di massimo assoluto per  $f$ .

*Osservazione 1.41.*

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico allora  $d(x, y)$  è continua in  $x$  e  $y$ . Infatti se  $x_n \rightarrow x$  troviamo applicando due volte la disuguaglianza triangolare

$$0 \leftarrow -d(x_n, x) \leq d(x, y) - d(x_n, y) \leq d(x_n, x) \rightarrow 0,$$

ovvero  $d(\cdot, y)$  è continua. In modo analogo si trova il risultato per  $d(x, \cdot)$ .

In particolare notiamo che se  $(X, \|\cdot\|)$  è uno spazio normato allora  $\|\cdot\|$  è continua.

## 1.4.1 Funzioni Lipschitziane

**Definizione 1.42** (Funzione Lipschitziana).

Dati  $(X, d)$  e  $(Y, \bar{d})$  spazi metrici,  $f : X \rightarrow Y$  è una funzione  **$L$ -Lipschitziana** per  $L \geq 0$  se:

$$\bar{d}(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Se  $X = Y$ ,  $d = \bar{d}$  e  $L < 1$  allora  $f$  è detta **contrazione**.

*Osservazione 1.43.*

Ogni funzione lipschitziana è uniformemente continua e ogni funzione uniformemente continua è continua.

**Teorema 1.44** (Teorema delle contrazioni / Banach Caccioppoli).

Dati  $X$  spazio metrico completo e  $f : X \rightarrow X$  contrazione allora esiste un unico punto  $x \in X$  tale che  $f(x) = x$  ( $x$  è un **punto fisso** della contrazione).

Inoltre per ogni  $x_0 \in X$  la successione definita iterativamente da  $x_{n+1} = f(x_n)$  converge a  $x$ .

**Proposizione 1.45** (Formulazione equivalente di Lipschitzianità).

$f$  è  $L$ -Lipschitz  $\iff f(x) \leq f(y) + Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X$

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) è ovvia, basta svolgere il modulo nella definizione.

$\impliedby$ ) Se vale la disuguaglianza supposta allora vale anche  $f(y) \leq f(x) + Ld(x, y)$ , cioè vale  $\bar{d}(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$ .  $\square$

**Lemma 1.46** (Inf di Lipschitziane è Lipschitziana).

Sia  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una famiglia di funzioni  $L$ -Lipschitziane da  $X$  a  $\mathbb{R}$  con la stessa costante. Definendo

$$f(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x),$$

se esiste  $x_0$  in  $X$  tale che  $f(x_0) > -\infty$ , allora  $f$  è  $L$ -Lipschitziana.

*Dimostrazione.*

Per definizione di estremo inferiore e di Lipschitzianità si ha che:

$$f(x_0) \leq f_\alpha(x_0) \leq f_\alpha(y) + Ld(x_0, y).$$

Passando all'estremo inferiore ricaviamo che:

$$f(x_0) \leq f(y) + Ld(x_0, y),$$

da cui segue che  $f$  assume un valore reale per ogni  $y \in X$ .

Siano ora  $x, y \in X$  generici. Per quanto appena detto

$$f(x) \leq f(y) + Ld(x, y),$$

cioè  $f$  è L-Lipschitziana come voluto.  $\square$

## 1.4.2 Distanza punto-insieme e intorni tubolari

**Definizione 1.47** (Distanza punto-insieme).

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $A \subseteq X$ . Per ogni  $x \in X$  definiamo la **distanza di  $x$  da  $A$**  come

$$d(x, A) \doteq \inf_{a \in A} d(x, a).$$

**Proposizione 1.48** (Distanza da un insieme è continua).

Dato  $A \subseteq X$  non vuoto si ha che la mappa

$$x \mapsto d(x, A)$$

è 1-Lipschitz, in particolare è continua.

*Dimostrazione.*

Poniamo:  $f_a(x) = d(x, a)$  e  $f(x) = \inf_{a \in A} f_a(x) = d(x, A)$ .

Applichiamo la definizione di 1-Lipschitzianità alle componenti di  $f_a$ :

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

$$d(y, a) \leq d(x, y) + d(x, a).$$

Osserviamo che entrambe le disuguaglianze sono valide per ogni  $a$ , poiché la distanza è subadditiva; questo ci consente di affermare che la funzione è 1-Lipschitz per ogni  $a$ , in particolare, per il lemma precedente, anche  $f(x)$  è 1-Lipschitz.  $\square$

*Osservazione 1.49* (I punti a distanza nulla sono i punti aderenti).

Se  $d(x, A) = 0$  allora per ogni palla centrata in  $x$ , questa contiene un punto di  $A$ , dunque  $x \in \bar{A}$ ; viceversa un punto nella chiusura di  $A$  è a distanza 0 dall'insieme; quindi:

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}.$$

**Definizione 1.50** (Intorno tubolare).

Dato  $A \subset X$ , con  $(X, d)$  metrico, si definisce **intorno tubolare** di  $A$  il sottoinsieme:

$$\mathcal{N}_\varepsilon(A) = \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a).$$

L'idea di un intorno tubolare è quella di ricoprire  $A$  con piccole palle centrate in ogni punto del sottoinsieme.

*Osservazione 1.51.*

Applicando la definizione si ricavano le seguenti proprietà degli intorni tubolari:

- $\mathcal{N}_\varepsilon(A)$  è aperto (poiché unione di palle aperte);
- $\mathcal{N}_\varepsilon(A \cup B) = \mathcal{N}_\varepsilon(A) \cup \mathcal{N}_\varepsilon(B)$  (applica la definizione);
- $\overline{\mathcal{N}_\varepsilon(A)} \subset \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$  (per passaggio alla chiusura dell'unione);
- $\mathcal{N}_{\varepsilon_1}(\mathcal{N}_{\varepsilon_2}(A)) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(A)$  (disuguaglianza triangolare).

### 1.4.3 Compatti in spazio metrico

**Definizione 1.52** (Insieme totalmente limitato).

Un insieme si dice  **$X$  totalmente limitato** se esiste una successione  $x_1, x_2, \dots, x_m$  di elementi di  $X$  che lo ricopre, cioè:

$$X \subset \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i).$$

La successione prende il nome di  **$\varepsilon$ -net** (o  **$\varepsilon$ -rete**).

**Teorema 1.53** (Caratterizzazione dei compatti in spazi metrici).

*I seguenti fatti sono equivalenti:*

1. Uno spazio metrico  $(X, d)$  è compatto per successioni;
2. Uno spazio metrico  $(X, d)$  è completo e totalmente limitato;
3. Se  $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$ , con  $A_\alpha$  aperti, allora  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$  tali che  $X \subset \bigcup_{j=1}^m A_{\alpha_j}$ .

*Dimostrazione.*

Prima di cominciare la dimostrazione delle implicazioni alcune osservazioni preliminari: dire che  $X$  è totalmente limitato è equivalente a dire che si può scrivere come unione di insiemi  $C_i$  il cui diametro sia minore di  $\varepsilon$ : questo poiché con tale imposizione gli insiemi costituiscono una  $\varepsilon$ -rete per il nostro insieme; inoltre se un insieme  $X$  è totalmente limitato allora esiste una  $\varepsilon$ -rete che lo ricopre interamente, ma allora anche i sottoinsiemi  $Y$  di  $X$  sono ricoperti, cioè i sottoinsiemi di un insieme totalmente limitato sono totalmente limitati.

Dimostriamo ora le frecce in catena:

- 1  $\Rightarrow$  2: Consideriamo una successione di Cauchy di  $X$   $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ : per compattezza, da questa possiamo estrarre una sottosuccessione convergente, cioè  $\exists n_k$  :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \bar{x} \in X$ , ma la successione è di Cauchy, quindi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$ , quindi lo spazio è completo.

Supponiamo, *per assurdo*, che lo spazio non sia totalmente limitato, allora c'è un  $\varepsilon_0 > 0$  tale per cui non esiste una  $\varepsilon$ -rete; quindi possiamo scegliere un  $x_0 \in X$ , un  $x_1 \in X \setminus B_{\varepsilon_0}(x_0)$ , un  $x_2 \in X \setminus (B_{\varepsilon_0}(x_0) \cup B_{\varepsilon_0}(x_1)) = \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(x_0, x_1)$  e così via. Abbiamo quindi una successione  $\{x_0, \dots, x_k\}$ , per cui possiamo scegliere  $x_{k+1} \in X \setminus \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(x_0, \dots, x_k)$ , per cui, in questa successione,  $\forall n \neq m, d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ , quindi  $x_n$  non ha sottosuccessioni convergenti, e questo è impossibile per compattezza di  $X$ .  $\not\Leftarrow$

- 2  $\Rightarrow$  3: Proveremo ora che uno spazio metrico  $(X, d)$  completo e totalmente limitato allora è compatto per ricoprimenti, cioè che dato un ricoprimento aperto di  $X$  se ne può estrarre un sottoricoprimento finito.

Supponiamo, *per assurdo*, che questa affermazione sia falsa, cioè che data una famiglia di aperti  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$  tale che  $X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_\alpha$  da questa non si può estrarre un

sottoricoprimento finito.

Consideriamo le successioni  $\varepsilon_k = \{\frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , dove gli  $\mathcal{F}_k$  sono famiglie finite di insiemi, tali che  $\forall C \in \mathcal{F}_k \text{ diam}(C) < \varepsilon_k$ .

Costruiamo la successione  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{F}_k \\ k \in \mathbb{N}}} C$ : questi insiemi non sono finitamente

ricopribili con gli  $A_\alpha$ , inoltre le unioni sono in catena:  $X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_k \supset \dots$

Consideriamo uno  $\xi_k \in X_k$ : se  $k \geq N$   $\xi_k \in X_N \forall k \geq N$ , cioè  $d(\xi_{k_1}, \xi_{k_2} \leq \text{diam}(X_N) = \frac{1}{N}, \forall k_1, k_2 \geq N$ , ovvero la successione  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy, quindi

$\xi_k \rightarrow \bar{\xi} \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} X_k$ . Questo implica che  $\exists \bar{\alpha} : \bar{\xi} \in A_{\bar{\alpha}}$ , che è aperto, dunque contiene una palla  $B_\delta(\bar{\xi})$ ; a questo punto, scegliendo  $N > \frac{1}{2\delta}$ ,  $X_N \subset B_\delta(\bar{\xi}) \subset A_{\bar{\alpha}}$ , e questo è assurdo, poiché implica che  $X_N$  sia finitamente ricopribile, mentre avevamo supposto il contrario.  $\nexists$ .

- $3 \Rightarrow 1$ : Supponiamo, *per assurdo*, che uno spazio  $(X, d)$  sia compatto per ricoprimenti ma non per successioni; allora esiste in  $X$  una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  che non ammette sottosuccessioni convergenti. Consideriamo  $y \in X$ : esisterà un intorno aperto  $A_y$  di  $y$  tale che l'insieme  $\{k : x_k \in A_y\}$  sia finito; facendo variare  $y$  troverò un sistema di insiemi aperti che ricopre  $X$ , ossia  $\bigcup_{y \in X} A_y$  è un ricoprimento aperto di  $X$ , da cui quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito che sarà un  $\bigcup_{j=1}^m A_{y_j} = X$ , ma questo è assurdo, poiché per ipotesi  $\bigcup_{j=1}^m A_{y_j}$  è un'unione finita di insiemi finiti, mentre  $X$  è costituito dagli infiniti elementi  $\bigcup_{y \in X} A_y$ .  $\nexists$

□

**Proposizione 1.54** (Compatti in metrico ammettono denso numerabile).

Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico compatto allora esiste  $E \subseteq X$  denso e numerabile.

*Dimostrazione.*

Dato che  $X$  è compatto è totalmente limitato per la **Caratterizzazione dei compatti in spazi metrici**, per ogni  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  consideriamo una  $\frac{1}{n}$ -rete data da  $\{x_k^{(n)}\}$ . Osserviamo che  $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_k^{(n)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  è numerabile e che per ogni punto  $x \in X$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $B_{\frac{1}{m}}(x) \subseteq B_\varepsilon(x)$ , da cui per qualche  $k \in \mathbb{N}$  si ha che  $x_k^{(m)} \in B_\varepsilon(x)$ , cioè  $D$  è denso in  $X$ . □

**Proposizione 1.55** (In totalmente limitato successioni hanno sottosuccessione di Cauchy).

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico totalmente limitato, allora ogni successione  $x_n \in X$  ammette una sottosuccessione di Cauchy.

*Dimostrazione.*

Se  $x_n$  assume frequentemente un certo valore allora la successione costante a quel valore è della forma cercata.

Supponiamo dunque che  $\{x_n\}$  sia un insieme infinito. Sia  $\{B_k\}$  una 1-rete di  $X$ . Per il principio dei cassetti deve esistere  $B_{k_0}$  contenente infiniti termini della successione. Consideriamo allora la sottosuccessione  $x_n^{(1)}$  data dai termini di  $x_n$  contenuti in  $B_{k_0}$ . Consideriamo ora una  $\frac{1}{2}$ -rete e con un ragionamento analogo troviamo una sottosuccessione di  $x_n^{(1)}$  contenuta interamente in una palla di raggio  $\frac{1}{2}$ . Ripetiamo questo procedimento costruendo  $x_n^{(k)}$  tali che  $d(x_i^{(k)}, x_j^{(k)}) \leq \frac{1}{k}$  per ogni  $i, j, k \in \mathbb{N}$ . La successione  $y_n = x_n^{(n)}$  è una sottosuccessione di  $x_n$  di Cauchy. □

#### 1.4.4 Equivalenza delle norme su spazi reali a dimensione finita

**Fatto 1.56.**

Ogni norma su  $\mathbb{R}^n$  è continua come mappa da  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$  a  $\mathbb{R}$ , dove  $|\cdot| = \|\cdot\|_2$  è la solita norma euclidea.

*Dimostrazione.*

Scriviamo  $x \in \mathbb{R}^n$  come  $x = \sum x_i e_i$ . Se  $L = \max \|e_i\|$  allora

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq L \|x\|_1 \leq L\sqrt{n}|x|,$$

questo mostra che  $\|\cdot\|$  è  $L\sqrt{n}$ -lipschitziana su  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ .  $\square$

**Proposizione 1.57** (Equivalenza delle norme su  $\mathbb{R}^n$ ).

Tutte le norme su  $\mathbb{R}^n$  sono equivalenti alla **norma euclidea**  $\|\cdot\|_2 := |\cdot|$ , cioè  $\exists M, m > 0 : m|\mathbf{x}| < \|\mathbf{x}\| < M|\mathbf{x}|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo l'insieme:  $S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\}$ <sup>1</sup>:

questo insieme è chiuso e limitato, per cui, essendo un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è compatto (per la norma euclidea), per cui possiamo considerare  $m = \min_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} \|\mathbf{x}\|$  e  $M = \max_{\mathbf{x} \in S^{n-1}} \|\mathbf{x}\|$

garantiti dal **Teorema di Weierstrass** (perché le norme sono continue su  $\mathbb{R}^n$  euclideo).

Ora, poiché  $|\mathbf{x}| = 1, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \in S^{n-1}$ , dunque  $m \leq \|\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\| \leq M$ ; dunque

$m|\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\| \leq M|\mathbf{x}|$ .  $\square$

*Osservazione 1.58.*

Con l'equivalenza tra norme si ha che tutti gli spazi  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$  hanno la stessa topologia e sono spazi di Banach.

**Proposizione 1.59.**

$(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach.

*Dimostrazione.*

Per provare che  $C([a, b])$  è di Banach dobbiamo far vedere che è completo, cioè ogni successione di Cauchy deve convergere uniformemente nello spazio.

Consideriamo quindi una successione di Cauchy  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$ : per definizione, sappiamo che esiste un indice  $n_\varepsilon$  tale che, comunque scelti un  $\varepsilon$  positivo e due indici  $n$  e  $m$  maggiori di  $n_\varepsilon$ , vale  $|f_n - f_m| < \varepsilon$ . La successione  $f_n$  è di Cauchy su tutto l'intervallo  $[a, b]$ , dunque è limitata, cioè esiste una  $f(x)$  continua tale che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$  per ogni  $x$  in  $[a, b]$ ; possiamo quindi affermare che è valida l'uguaglianza:  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = f(x)$  e dunque  $|f_n - f_m| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} |f_n - f|$ , quindi  $|f_n - f| < \varepsilon$ , ovvero, per equivalenza tra le norme,  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

Abbiamo provato che ogni successione di Cauchy nello spazio converge ad un  $f$ : per concludere la dimostrazione dobbiamo provare che  $f \in C([a, b])$ . Le  $f_n$  sono uniformemente continue (per il **Teorema di Heine-Cantor**), allora, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che per  $\|x - y\|_\infty < \delta$  si ha  $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$ . Posti  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y)$ , abbiamo, per disuguaglianza triangolare,  $|f(x) - f(y)| < |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < 3\varepsilon/3 = \varepsilon$ , ovvero  $f$  è uniformemente continua, cioè  $f \in C([a, b])$ .  $\square$

*Osservazione 1.60.*

La convergenza per la norma  $\|\cdot\|_\infty$  è la convergenza uniforme.

## 1.4.5 Compatti nello spazio delle funzioni continue su compatto

Vista l'utilità degli spazi compatti proviamo a caratterizzarli per lo spazio delle funzioni continue. Il seguente teorema ci permette di capire quando da una successione di funzioni possiamo estrarre una sottosuccessione convergente uniformemente.

Dapprima diamo le seguenti:

<sup>1</sup>detto **ipersfera** di dimensione  $n - 1$  in  $\mathbb{R}^n$

**Definizione 1.61** (Equilinearità).

Una successione di funzioni continue  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nello spazio  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ , dove  $K$  è un generico compatto in  $\mathbb{R}^n$ , è detta **equilineare** o **equilimitata** se:

$$\|f_n\|_\infty \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove  $C$  è un generico numero reale.

**Definizione 1.62** (Equicontinuità).

Una successione di funzioni continue  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nello spazio  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ , dove  $K$  è un generico compatto in  $\mathbb{R}^n$ , è detta **equicontinua** se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall |x - y| < \delta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Definizione 1.63** (Successione densa).

Una successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è **densa** in un compatto  $K$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in K, \exists x_n \in B_\varepsilon(x) \cap K.$$

**Teorema 1.64** (Teorema di Ascoli-Arzelà).

Se  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione di funzioni in  $C(K)$ , con  $K$  compatto in  $\mathbb{R}^n$ , **equilineare** ed **equicontinua** allora si può estrarre da  $f_n$  una sottosuccessione  $f_{n_k}$  convergente uniformemente in  $C(K)$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo una successione  $x_i \in K$  densa in  $K$  (per esempio  $K \cap \mathbb{Q}^n$ ). Essendo ogni termine di  $(f_n)$  equilimitato sappiamo che  $\{f_n(x_i) \mid n \in \mathbb{N}\}$  è limitato. Leggendo questo insieme come una successione in  $n$  possiamo estrarre per il **Teorema di Bolzano-Weierstrass** una sottosuccessione  $\{f_{n_k^{(1)}}\}$  di  $\{f_n\}$  tale che  $f_{n_k^{(1)}}(x_1) \rightarrow y_1$  per qualche  $y_1 \in \mathbb{R}$ . Dato l'ovvio contenimento  $\{f_{n_k^{(1)}}\} \subseteq \{f_n\}$  abbiamo che questa successione continua ad essere limitata, e applicando nuovamente il **Teorema di Bolzano-Weierstrass** troviamo  $(f_{n_k^{(2)}})$  tale che  $f_{n_k^{(2)}}(x_2) \rightarrow y_2 \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che  $(f_{n_k^{(2)}}(x_1))$  una sottosuccessione di  $(f_{n_k^{(1)}}(x_1))$  e quindi anche essa converge a  $y_1$ . Ripetendo questo procedimento possiamo costruire una sottosuccessione  $(f_{n_k^{(i)}})$  tale che  $\forall j \leq i$  abbiamo  $f_{n_k^{(i)}}(x_j) \rightarrow y_j$ . Consideriamo la successione  $(f_{n_k^{(k)}})$ , che chiameremo  $(f_k)$  per alleggerire la notazione. Essa è definitivamente una sottosuccessione di  $(f_{n_k^{(i)}})$  per ogni  $i$ , quindi  $f_k(x_i) \rightarrow y_i$  per ogni  $i$ .

Mostriamo ora che  $f_k$  è di Cauchy. Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e sia  $\delta > 0$  il valore garantito dall'equicontinuità. Avendo scelto  $x_i$  densa in  $K$  abbiamo

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\delta(x_i),$$

infatti se esistesse  $\bar{x} \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\delta(x_i)$  allora per ogni  $x_i$  avremmo  $|\bar{x} - x_i| \geq \delta$  ovvero  $B_\delta(\bar{x}) \cap K \cap \{x_i\} = \emptyset$ .  $\neq$

Essendo  $K$  compatto ricaviamo che esistono  $x_1, \dots, x_N$  tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_\delta(x_i).$$

Per mostrare che  $f_k$  è di Cauchy dobbiamo mostrare che esiste un intero  $k_\varepsilon$  tale che

$$\forall h, \ell > k_\varepsilon, \|f_h - f_\ell\|_\infty \leq \varepsilon \iff \forall x \in K, \forall h, \ell > k_\varepsilon, |f_h(x) - f_\ell(x)| \leq \varepsilon.$$

Dato che  $f_k(x_i) \rightarrow y_i$  in particolare  $f_k(x_i)$  è di Cauchy per ogni  $i$ , ovvero  $\exists n_\varepsilon^{(i)}$  tale che  $\forall n, m > n_\varepsilon^{(i)}$  vale  $|f_n(x_i) - f_m(x_i)| < \varepsilon$ . Sia  $k_\varepsilon = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \{n_\varepsilon^{(i)}\}$  in modo tale che per

ogni  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\forall h, \ell > k_\varepsilon$  abbiamo  $|f_h(x_i) - f_\ell(x_i)| < \varepsilon$ . Per la densità di  $\{x_i\}$  in  $K$  abbiamo che  $\forall x \in K$ ,  $\exists x_i \in \{x_1, \dots, x_N\}$  tale che  $|x - x_i| < \delta$ . Applicando la disuguaglianza triangolare troviamo che  $\forall h, \ell > k_\varepsilon$

$$|f_h(x) - f_\ell(x)| \leq |f_h(x) - f_h(x_i)| + |f_h(x_i) - f_\ell(x_i)| + |f_\ell(x_i) - f_\ell(x)| \leq 3\varepsilon$$

ovvero  $\|f_h - f_\ell\| \leq 3\varepsilon$  e quindi  $(f_k)$  è di Cauchy.

Sia  $f$  il limite di  $(f_k)$ . Mostriamo che  $f \in C(K)$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e sia  $\delta$  il valore garantito dall'equicontinuit . Ponendoci nell'ipotesi in cui  $|x - y| < \delta$  e ricordando che  $f_k \rightarrow f$  abbiamo definitivamente

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(y) - f(y)| + |f_k(x) - f_k(y)| < 3\varepsilon,$$

ovvero  $f \in C(K)$ . □

*Osservazione 1.65.*

Osserviamo che richiedere solo l'equilimitatezza non   sufficiente per estrarre una sottosuccessione convergente nelle funzioni continue. Ancora un esempio di questo fatto  

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

È possibile mostrare la veridicit  della seguente caratterizzazione dei compatti su  $C(K)$ :

**Teorema 1.66** (Caratterizzazione dei compatti su  $C(K)$ ).

Un insieme chiuso  $E \subseteq C(K)$    compatto in  $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$  se e solo se tutte le funzioni  $f \in E$  sono equilimitate ed equicontinue.

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

## 1.5 Spazi di successioni con norma $p$

Se immaginiamo di considerare il limite di  $\mathbb{R}^n$  per  $n \rightarrow \infty$  troviamo in un certo senso  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ , cio  le successioni a valori in  $\mathbb{R}$ . Cerchiamo allora di dotare anche queste della struttura di spazi di Banach.

**Definizione 1.67** (Spazi  $\ell^p$ ).

Uno spazio  $\ell^p$    un insieme cos  definito:

$$\ell^p = \left\{ \mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} : \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p < +\infty \right\},$$

dotato della seguente norma:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Come per gli altri contesti dove definiamo norme  $p$ , definiamo  $\ell^\infty$  come

$$\ell^\infty = \left\{ \mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} : \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < +\infty \right\}$$

dotato della norma

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|.$$

*Osservazione 1.68.*

La scelta del valore  $p$  è fondamentale: cambiando questo numero, cambia completamente lo spazio; ad esempio la successione  $\frac{1}{n}$  appartiene ad  $\ell^2$  (ed in generale a tutti gli  $\ell^p$  con  $p \geq 2$ ), ma non ad  $\ell^1$ .

**Proposizione 1.69** (Gli spazi  $\ell^p$  sono Banach).

*Lo spazio  $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$  è uno spazio normato e di Banach.*

*Dimostrazione.*

$p > 1$ ) Dalla definizione della funzione  $\|\cdot\|_p$  sono evidenti le prime due proprietà di norma.

Bisogna dimostrare la subadditività.

Consideriamo la proiezione:

$$\pi_n: \ell^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \{x_i\}_{i=1}^{+\infty} \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

Presi due generici  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$  in  $\ell^p$ , abbiamo  $\|\pi_n(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|_p \leq \|\pi_n(\mathbf{x})\|_p + \|\pi_n(\mathbf{y})\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p$ . Queste disuguaglianze derivano subito dalla differenza di lunghezza delle stringhe dei primi  $n$  termini delle componenti dei vettori, dunque, passando all'estremo superiore sul valore di  $\pi_n$  applicata ai due vettori ricaviamo la disuguaglianza triangolare:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\pi_n(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|_p = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

Questo dimostra che lo spazio è normato; dimostriamo ora che è completo.

Una successione  $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\ell^p$  è una stringa del tipo  $(x_i^{(n)})_{i=1}^{+\infty}$ . Se questa successione è di Cauchy allora, per come abbiamo definito la norma dello spazio:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0 : \|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^{(m)}\|_p < \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

Dunque la successione è di Cauchy su ogni componente di  $\mathbf{x}$ , dunque ogni componente convergerà ad un certo  $\bar{x}_i$ .

A questo punto, siccome la serie che definisce la norma è limitata, lo sarà anche una certa somma parziale, cioè possiamo scrivere:

$$\left( \sum_{i=1}^K |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \forall n, m > N > 0,$$

cioè, passando al limite sulla seconda successione:

$$\left( \sum_{i=1}^K |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon,$$

cioè, considerando l'estremo superiore di  $K$ :

$$\left( \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Ovvero ogni successione di Cauchy in  $\ell^p$  converge secondo la norma definita.

$p = \infty$ ) Il fatto che  $\|\cdot\|_\infty$  sia una norma è chiaro, dato che  $\sup f + \sup g \geq \sup f + g$ . Mostriamo allora la completezza.

Sia  $f^{(n)}$  una successione di Cauchy in  $\ell^\infty$ , ovvero per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $\forall n, m \geq N$  si ha

$$\|f^{(n)} - f^{(m)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Osserviamo che se  $(x_i) \in \ell^\infty$  abbiamo che  $|x_i| \leq \|(x_i)\|_\infty = \sup |x_i|$ , quindi abbiamo  $|f_i^{(n)} - f_i^{(m)}| < \varepsilon$  per ogni  $i$  e per ogni  $n, m \geq N$ , ovvero ogni successione  $(f_i^{(n)})_n$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Essendo  $\mathbb{R}$  completo, queste ammettono un limite in  $n$  che denotiamo  $f_i$ . Consideriamo allora la successione  $f = (f_i)_i$ . Se la successione di partenza converge, per costruzione questo è il limite, quindi basta verificare che  $f$  è effettivamente un elemento di  $\ell^\infty$ .

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , allora esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $|f_i^{(n)} - f_i^{(m)}| < \varepsilon/2$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  e per ogni  $n, m \geq N$ . Passando al limite in  $m$  abbiamo che  $|f_i^{(n)} - f_i| \leq \varepsilon/2$  per ogni  $i$  e per ogni  $n \geq N$ , allora  $\sup_i |f_i^{(n)} - f_i| \leq \varepsilon/2$ , ovvero  $\|f^{(n)} - f\|_\infty \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$  definitivamente. Sapendo questo scegliamo per esempio  $\varepsilon = 1$ , da cui

$$|f_i| \leq |f_i^{(N)} - f_i| + |f_i^{(N)}| \leq 1 + \|f^{(N)}\|_\infty \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

quindi  $0 \leq \|f\|_\infty \leq 1 + \|f^{(N)}\|_\infty$  e dato che  $f^{(N)} \in \ell^\infty$  abbiamo che  $f$  ha norma limitata, cioè  $f \in \ell^\infty$ .  $\square$

*Osservazione 1.70.*

Anche in questo caso, preso  $p \leq p'$ , si ha che la mappa:

$$p \mapsto \|\cdot\|_p$$

è debolmente decrescente. Inoltre la mappa:

$$\ell^p \hookrightarrow \ell^{p'}$$

è continua.

**Esempio 1.71.**

Una funzione lineare non è necessariamente continua.

*Dimostrazione. (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

Si consideri la mappa

$$T : \begin{array}{ccc} \ell^\infty([0, 1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f'(0) \end{array} .$$

Verifichiamo che  $T$  non è continua per successioni, e quindi non è continua. Consideriamo la successione  $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ , che converge alla mappa nulla rispetto a  $\|\cdot\|_\infty$ . Eppure

$$T(f_n) = \frac{n^2 \cos(n^2 \cdot 0)}{n} = n \rightarrow \infty \neq 0 = T(0).$$

$\square$

## Capitolo 2

# Calcolo Differenziale

### 2.1 Continuità su spazi a più dimensioni

**Proposizione 2.1** (Criterio per la continuità in  $\mathbb{R}^n$ ).

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ha che  $f$  è continua in  $x_0 \in A$  se e solo se per ogni curva continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\gamma(0) = x_0$  si ha  $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in 0.

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Se  $f$  è continua in  $x_0$  e  $\gamma$  è continua in 0 con  $\gamma(0) = x_0$  allora  $f \circ \gamma$  è continua in 0.

$\impliedby$ ) Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia continua e consideriamo una successione  $\{x_n\}$  tale che  $x_n \rightarrow x_0$  ma  $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$ .

Consideriamo una curva  $\gamma$  tale che per una successione  $t_n$  decrescente in  $[0, 1]$  tendente a 0 si ha  $\gamma(t_n) = x_n$ . Osserviamo allora che

$$f \circ \gamma(t_n) = f(x_n) \not\rightarrow f(x_0) = f \circ \gamma(0),$$

cioè  $f \circ \gamma$  non è continua in 0.  $\nexists$

□

*Osservazione 2.2.*

Per verificare che una funzione NON è continua è sufficiente ma NON necessario che per qualche vettore  $v$ ,  $f(tv) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  non è continua.

**Esempio 2.3** (Funzione con lo stesso limite per le rette ma non continua).

La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è chiaramente non continua ma per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  si ha che  $\lim_{t \rightarrow 0} f(tv_1, tv_2) = 0$ .

**Proposizione 2.4** (Criterio per continuità con maggiorazione).

Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se esiste  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $g(0) = 0$  e  $g \geq 0$  tale che

$$|f(x) - f(x_0)| \leq g(|x - x_0|)$$

allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

*Dimostrazione.*

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(|x - x_0|) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

□

*Osservazione 2.5.*

Concretamente la condizione descritta sopra richiede verificare che  $|f(x) - f(x_0)| = o(1)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

## 2.2 Differenziabilità

La generalizzazione più immediata della derivata per funzioni a singola variabile è fissare  $n - 1$  variabili in modo da ottenere una funzione ad una variabile e derivare questa.

**Definizione 2.6** (Derivata parziale).

Data  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $x_0 \in A$  la **derivata parziale  $i$ -esima** è la derivata di  $f$  nella variabile  $x_i$ , cioè il seguente limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t}.$$

Indichiamo la derivata parziale  $i$ -esima con una qualsiasi delle seguenti notazioni:

$$f_{x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{x_i} f(x_0)$$

Possiamo assimilare le derivate parziali con il seguente operatore:

**Definizione 2.7** (Gradiente).

Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , se per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  l' $i$ -esima derivata parziale di  $f$  in  $x_0$  esiste allora il vettore

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f(x_0)$$

si dice **gradiente** di  $f$  in  $x_0$ .

Possiamo generalizzare la derivata parziale anche cambiando la direzione.

**Definizione 2.8** (Derivata direzionale).

Dato  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

si dice **derivata direzionale** di  $f$  lungo  $v$ .

Ricordiamo però che i limiti in  $\mathbb{R}^n$  non sono riconducibili solo a limiti lungo rette, diamo quindi una vera generalizzazione della derivabilità.

**Definizione 2.9** (Differenziabilità).

Una funzione  $f$  è **differenziabile** in  $x_0$  se  $\exists v \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$f(x) = f(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

In tal caso  $v$  si indica con  $\mathcal{D}f(x_0)$ .

*Osservazione 2.10.*

La definizione afferma che una funzione differenziabile è approssimabile a meno di piccolo errore da una applicazione affine, in particolare con la notazione sopra da

$$x \mapsto f(x_0) + v \cdot (x - x_0).$$

**Proposizione 2.11.**

Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  allora il gradiente è ben definito e si ha

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $f(x) = f(x_0) + v \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|)$ . Calcoliamo le derivate parziali  $i$ -esime:

$$\frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} = \frac{v(te_i) + o(|te_i|)}{t} = (v_i + o(1)) \rightarrow v_i,$$

quindi le entrate del gradiente in  $x_0$  coincidono con le entrate di  $v$  come voluto.  $\square$

*Osservazione 2.12.*

Con lo stesso conto vediamo che  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  la derivata direzionale lungo  $w$  esiste e vale

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot w.$$

*Osservazione 2.13.*

Queste coincidenze valgono **solo** se  $f$  è differenziabile, altrimenti è possibile, per esempio, che

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0) \neq \nabla f(x_0) \cdot w$$

anche se entrambe le quantità sono ben definite.

*Osservazione 2.14* (Gradiente individua la direzione di massima pendenza).

Se  $f$  è differenziabile la **direzione di massima pendenza** è data da

$$\max_{w \in S^{n-1}} \frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = |\nabla f(x_0)|.$$

Più precisamente il versore è

$$\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}.$$

Cerchiamo ora di trovare un criterio per capire se una funzione è differenziabile.

**Teorema 2.15** (Differenziabilità totale).

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $z_0 = (x_0, y_0) \in A$  tale che  $\forall i, \forall z = (x, y) \in B_r(z_0)$  esiste la derivata parziale  $i$ -esima in  $z$  e questa è continua in  $z_0$ . Allora  $f$  è differenziabile in  $z_0$ .

*Dimostrazione.*

L'idea è usare il teorema di Lagrange in ogni direzione. Mostriamo per semplicità notazionale solo il caso  $n = 2$  ma il procedimento è analogo per ogni  $n$ .

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) + o(1) \right) (x - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1) \right) (y - y_0) = \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) = \\ &= \nabla f(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|). \end{aligned}$$

Quindi  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ . □

## 2.2.1 Funzioni da spazi reali a spazi reali in più dimensioni

Quanto detto si applica anche per funzioni a valori in  $\mathbb{R}^m$ .

**Notazione 2.16** (Componenti).

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Scriviamo che

$$f = (f_1, \dots, f_m),$$

dove le  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  sono le **proiezioni** o **componenti** di  $f$  sui singoli fattori.

*Osservazione 2.17.*

Con la notazione sopra,  $f$  continua in  $x_0$  se e solo se  $f_i$  continua in  $x_0$  per ogni  $i$ . Similmente  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se e solo se  $f_i$  differenziabile in  $x_0$  per ogni  $i$ .

**Definizione 2.18** (Matrice Jacobiana).

Osserviamo che presa una  $f$  come sopra

$$f(x) = f(x_0) + \mathcal{D}f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

dove l'entrata  $i, j$  nella matrice  $\mathcal{D}f(x_0)$  è data da  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$ . La matrice è detta **matrice Jacobiana** di  $f$  in  $x_0$ .

$$\mathcal{D}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1^\top \\ \vdots \\ \nabla f_m^\top \end{pmatrix}.$$

**Notazione 2.19.**

Spesso scriveremo  $\nabla f$  al posto di  $\mathcal{D}f$  dato che le entrate si calcolano in modo molto simile. Per mantenere la notazione costante potremmo dunque identificare  $\nabla f(x_0)$  come vettore riga e  $\nabla f(x_0)$  come vettore colonna. Questo si manifesterà principalmente nello scrivere

$$\nabla f(x_0)(x - x_0)$$

al posto di

$$\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

*Osservazione 2.20.*

Una definizione del tutto analoga funziona per funzioni tra spazi di Banach, ovvero  $f : B_1 \rightarrow B_2$  con  $B_1, B_2$  spazi di Banach è differenziabile in  $x_0$  se  $\exists L : B_1 \rightarrow B_2$  lineare continua tale che

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Diamo alcune immediate generalizzazioni delle proprietà della derivata che già conosciamo:

**Proposizione 2.21** (Regola della catena in più dimensioni).

Data  $f : U \rightarrow V$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  aperti,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Se  $f$  è differenziabile in  $x_0$  e  $g$  è differenziabile in  $f(x_0)$  allora la composizione  $g \circ f$  è differenziabile in  $x_0$  e

$$\mathcal{D}(g \circ f)(x_0) = \mathcal{D}(g(f(x_0)))\mathcal{D}f(x_0).$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(f(x_0) + \mathcal{D}f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)) = \\ &= g(f(x_0)) + \mathcal{D}g(f(x_0))(\mathcal{D}f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)) + o(|f(x) - f(x_0)|) = \\ &= g(f(x_0)) + \mathcal{D}g(f(x_0))(\mathcal{D}f(x_0))(x - x_0) + o(|x - x_0|). \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.22** (Teorema di Lagrange).

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile e sia  $[x, y] = \{x + \lambda(y - x) \mid \lambda \in [0, 1]\} \subseteq U$  il segmento tra  $x$  e  $y$ . Allora esiste  $z \in [x, y] \setminus \{x, y\}$  tale che

$$f(y) - f(x) = \nabla f(z)(y - x).$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $g(t) = f(x + t(y - x))$  per  $t \in [0, 1]$ . Applicando Lagrange a  $g(t)$  troviamo

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = 1 \cdot g'(\bar{t}) = \nabla f(x + \bar{t}(y - x)) \cdot (y - x).$$

Chiaramente ponendo  $z = x + \bar{t}(y - x)$  abbiamo la tesi.

□

**Corollario 2.23.**

Data  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile con  $U$  aperto connesso (e quindi connesso per archi<sup>1</sup>). Se  $\forall x \in U, \nabla f(x) = 0$  abbiamo che  $f$  è costante.

*Dimostrazione.*

Siano  $x, y \in U$  con  $x \neq y$ . Allora  $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow U$  differenziabile tale che  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$  (possiamo sceglierla differenziabile perché la connessione garantisce un percorso continuo ed essendo  $U$  aperto possiamo smussare tutti gli angoli). Calcolando allora

$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \implies f \circ \gamma \text{ costante,}$$

dunque  $f(x) = f(\gamma(0)) = f(\gamma(1)) = f(y)$  e data l'arbitrarietà di  $x$  e  $y$  vediamo che  $f$  è costante su  $U$ .  $\square$

*Osservazione 2.24.*

Il teorema non vale per  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , ciò che abbiamo è (ponendo  $f = (f_1, \dots, f_m)$ ) che per ogni  $i$  esiste un certo  $z_i$  tali che

$$f(y) - f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(z_1) \cdot (y - x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(z_m) \cdot (y - x) \end{pmatrix}.$$

*Osservazione 2.25.*

Se  $[x, y]$  appartiene al dominio possiamo dare una stima

$$|f(y) - f(x)| \leq \max_{z \in [x, y]} |\mathcal{D}f(z)| |y - x|.$$

**Notazione 2.26** (Norme di matrici indotte).

Quando consideriamo una matrice  $M$  e scriviamo  $\|M\|$ , se non altrimenti specificato, intendiamo la norma indotta da quella euclidea, cioè

$$\|M\| = \max_{|v|=1} |Mv| \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i,j} m_{ij}^2}}_{\text{Norma di Frobenius}}.$$

**Proposizione 2.27** (Gradiente limitato implica lipschitziana).

Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenziabile con  $U$  aperto connesso è tale che  $\|\mathcal{D}f(x_0)\| < L$  allora  $f$  è  $L$ -Lipschitziana in  $x_0$ .

*Dimostrazione.*

Vale la scrittura

$$f(x) = f(x_0) + \mathcal{D}f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|),$$

da cui sottraendo  $f(x_0)$  e passando alla norma

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\mathcal{D}f(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)| \leq \\ &\leq \|\mathcal{D}f(x_0)\| |x - x_0| + o(|x - x_0|) \stackrel{\text{dis. stretta } \|\mathcal{D}f(x_0)\| < L}{\leq} \\ &\leq L |x - x_0| \end{aligned}$$

e quindi  $f$  è localmente  $L$ -lipschitziana in  $x_0$ <sup>2</sup>. Per concludere basta osservare che una funzione localmente  $L$ -lipschitziana definita su un aperto connesso è  $L$ -lipschitziana (gli aperti convessi sono sempre connessi perché connessi per archi)<sup>3</sup>.  $\square$

<sup>1</sup>aperto connesso in localmente connesso per archi è connesso per archi.

<sup>2</sup>localmente perché l'ultima disuguaglianza vale se il termine  $o(|x - x_0|)$  è abbastanza piccolo, in particolare se  $x_0$  è abbastanza vicino a  $x$ .

<sup>3</sup>l'implicazione localmente  $L$ -lip.+connesso  $\implies L$ -lip. è una aggiunta non trattata in classe.

Per concludere la sezione proponiamo un interessante esercizio:

**Esempio 2.28** (Derivata del determinante).

Consideriamo la mappa

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n^2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \psi(A) & \longmapsto & \det A \end{array}$$

dove  $\psi : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  è l'isomorfismo dato le entrate di una matrice e considerarle come entrate di un vettore.

Allora, identificando  $M$  con  $\psi(M)$ ,  $H$  con  $\psi(H)$  e  $\det$  con  $\varphi$ , abbiamo che

$$\nabla \det(M) \cdot H = \text{tr}(\text{Adj}(M) \cdot H).$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo come preliminare le derivate parziali rispetto ad ogni entrata. Indicando con  $A_{ij}$  l'entrata alla  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna di  $A$  e con  $A^{ij}$  il minore di  $A$  dove escludiamo la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} \det M &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} (M_{ik} \det M^{ik}) = \\ &= (-1)^{j+i} \det(M^{ij}) + \sum_{k=1, k \neq j}^n (-1)^{k+i} M_{ik} \frac{\partial}{\partial M_{ij}} (\det M^{ik}) = \\ &= (-1)^{j+i} \det(M^{ij}) = \text{Adj}(M)_{ji}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che  $\nabla \det(M) = \text{Adj}(M)^\top$  (stiamo ancora identificando  $M(n, \mathbb{R})$  con  $\mathbb{R}^{n^2}$ ). Segue dunque che

$$\begin{aligned} \nabla \det(M) \cdot H &= \text{Adj}(M)^\top \cdot H = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Adj}(M)_{ji} H_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Adj}(M)_{(i, \cdot)} \cdot H_{(\cdot, i)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (\text{Adj}(M)H)_{ii} = \text{tr}(\text{Adj}(M)H), \end{aligned}$$

dove  $A_{(i, \cdot)}$  è l' $i$ -esima riga di  $A$  e  $A_{(\cdot, i)}$  è l' $i$ -esima colonna di  $A$ . □

**Corollario 2.29.**

Se  $M$  è invertibile, dato che  $M^{-1} = \det M^{-1} \text{Adj}(M)$ , segue che

$$\nabla \det(M)H = \det(M) \text{tr}(M^{-1}H).$$

## 2.3 Derivate successive e Taylor

Definiamo per ricorsione successive derivate parziali:

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} f \right).$$

**Definizione 2.30** (Matrice Hessiana).

Definiamo la matrice **Hessiana**

$$(\mathcal{D}^2 f)_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f.$$

Indicheremo la matrice Hessiana anche con  $\nabla^2 f$ .

*Osservazione 2.31.*

Nonostante in alcuni testi sia standard la notazione  $\nabla^2$  per indicare il Laplaciano, noi assegneremo un simbolo diverso a questo. Per noi  $\nabla^2$  indica il quadrato dell'operatore gradiente, cioè  $\nabla^2 f = \nabla(\nabla f)$ .

*Osservazione 2.32.*

$$(\mathcal{D}^k f)_{i_1, \dots, i_k} = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f,$$

ovvero  $\mathcal{D}^k f(x_0) : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  è una mappa multilineare con  $k$  entrate. Esplicitamente l'applicazione a  $k$  vettori  $v_1, \dots, v_k$  ha la seguente forma

$$\mathcal{D}^k f(x_0)[v_1, \dots, v_k] = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} f(x_0) \prod_{j=1}^k v_j^{i_j}$$

dove  $v_j^{i_j}$  indica la  $i_j$ -esima componente di  $v_j$ .

**Notazione 2.33.**

Per semplificare le scritture successive poniamo

$$\mathcal{D}^k f(x_0)[v]^k = \mathcal{D}^k f(x_0)[v, v, \dots, v].$$

*Osservazione 2.34.*

In generale l'ordine delle derivate parziali cambia il risultato. Questo inconveniente è mitigato dal seguente teorema.

**Teorema 2.35** (Teorema di Schwarz).

Data  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile ( $U$  aperto) e  $x_0 \in U$  tale che  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$  e  $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f$  esistono in un intorno di  $x_0$  e sono continue in  $x_0$  allora

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_0)$$

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $h, k \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ . Poniamo  $g(t) = f(x_0 + t h e_i + k e_j) - f(x_0 + t h e_i)$ . Vediamo allora che

$$f(x_0 + h e_i + k e_j) - f(x_0 + h e_i) - f(x_0 + k e_j) + f(x_0) = g(1) - g(0)$$

che per Lagrange è uguale a

$$g'(\theta) = h \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h e_i + k e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \theta h e_i) \right)$$

per qualche  $\theta \in (0, 1)$ . Sempre per Lagrange scomponiamo in

$$h k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_0 + \theta h e_i + \bar{\theta} k e_j).$$

Scegliendo  $\bar{g}(t) = f(x_0 + h e_i + t k e_j) - f(x_0 + t k e_j)$  troviamo un risultato analogo per la stessa espressione, da cui eguagliando vediamo che esistono  $\theta, \bar{\theta}, \psi, \bar{\psi} \in (0, 1)$  garantiti da Lagrange tali che

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x_0 + \theta h e_i + \bar{\theta} k e_j) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0 + \psi h e_i + \bar{\psi} k e_j).$$

Passando al limite per  $h, k \rightarrow 0$ , dalla continuità delle derivate parziali seconde troviamo la tesi.  $\square$

*Osservazione 2.36.*

Reiterando il teorema troviamo un risultato analogo per le derivate parziali di ordine  $k$ .

*Osservazione 2.37.*

Se  $f$  è differenziabile due volte in  $x_0$  allora vale il **Teorema di Schwarz** e quindi  $\mathcal{D}^2 f(x_0)$  è una matrice simmetrica.

### 2.3.1 Formula di Taylor

Siamo pronti per generalizzare la formula di Taylor che conoscevamo nel caso di singola variabile. Come sempre questa si rivelerà essere uno strumento utile, specialmente lo sviluppo fino al secondo ordine.

**Definizione 2.38** (Classe  $C^k$ ).

Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  è **di classe  $C^k$**  ( $f \in C^k(U)$ ) se  $f$  è differenziabile  $k$  volte e  $\mathcal{D}^k f$  è continua su  $U$ , o equivalentemente se le derivate parziali di ordine  $k$  di  $f$  esistono su  $U$  e sono continue su  $U$ .

**Teorema 2.39** (Espansione di Taylor).

Data  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto e  $x_0 \in U$  abbiamo

1. Se  $f \in C^k(U)$  allora

$$f(x) = T_k(f, x_0)(x) + \underbrace{o(|x - x_0|^k)}_{\text{Resto di Peano}}$$

dove

$$T_k(f, x_0)(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \mathcal{D}^i f(x_0) [x - x_0]^i.$$

2. Se  $f \in C^k(U)$  ed è differenziabile  $k+1$  volte in  $U$  allora

$$f(x) = T_k(f, x_0)(x) + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \mathcal{D}^{k+1} f(z) [x - x_0]^{k+1}}_{\text{Resto di Lagrange}}$$

con  $z \in (x_0, x)$ , cioè  $z$  è nell'interno del segmento che congiunge  $x$  e  $x_0$ .

*Dimostrazione.*

Il punto 1 si ottiene dal 2 applicandolo con  $k$  al posto di  $k+1$ , cioè se  $f \in C^k$  allora in particolare è  $C^{k-1}$  e differenziabile  $k$  volte.

Dimostriamo il punto 2. Chiaramente la tesi vale per  $k=0$  che coincide con la definizione di derivata di  $f$  in  $x_0$ . Fissiamo ora  $x \in U$  e poniamo  $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$  per  $t \in [0, 1]$ . Per semplicità notazionale scriveremo  $x_t$  al posto di  $x_0 + t(x - x_0)$ . Applico il teorema di Taylor (in una variabile) a  $g(t)$  in  $t=0$  osservando che

$$\begin{aligned} g^{(i)}(t) &= \mathcal{D}^i(f(x_t)) = \mathcal{D}^{i-1}(\mathcal{D}f(x_t)[x - x_0]) = \\ &= \mathcal{D}^{i-1} \left( \sum_{j=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_t)(x - x_0)_j \right) = \\ &= \mathcal{D}^{i-2} \left( \sum_{j_1=0}^n \sum_{j_2=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{j_2} \partial x_{j_1}} f(x_t)(x - x_0)_{j_2}(x - x_0)_{j_1} \right) = \\ &= \mathcal{D}^{i-2}(\mathcal{D}^2 f(x_t)[x - x_0]^2) = \dots \\ &\dots = \mathcal{D}^i f(x_t)[x - x_0]^i. \end{aligned}$$

In particolare vediamo che  $T_k(f, x_0)(x) = T_k(g, 0)(1)$ , da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= g(1) = T_k(g, 0)(1) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\bar{t}) = \\ &= T_k(f, x_0)(x) + \frac{1}{(k+1)!} \mathcal{D}^{k+1} f(x_{\bar{t}})[x - x_0]^{k+1}. \end{aligned}$$

Ponendo  $z = x_{\bar{t}}$  abbiamo il punto 2. □

## 2.4 Massimi e minimi locali

Generalizziamo leggermente la nozione che già conosciamo di massimo/minimo locale.

**Definizione 2.40** (Massimo e minimo locale).

Data  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto definiamo  $x_0$  un **massimo** (rispettivamente **minimo**) **locale** se  $\exists r > 0$  tale che  $f(x_0) \geq f(B_r(x_0))$  (rispettivamente  $f(x_0) \leq f(B_r(x_0))$ ).

Possiamo immediatamente generalizzare il criterio di Fermat al caso di funzioni a più variabili.

**Proposizione 2.41** (Criterio di Fermat).

Se  $x_0$  è un massimo/minimo locale per  $f$  allora  $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0,$$

in particolare, se definito,

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che se  $x_0$  è massimo/minimo locale allora  $t = 0$  restituisce il massimo/minimo di  $f(x_0 + tv)$  localmente. Dal criterio di Fermat in una variabile vediamo che se esiste

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0.$$

□

**Definizione 2.42** (Punto critico).

Un **punto critico** di una funzione differenziabile è un punto in cui si annulla il gradiente.

Generalizziamo ora la condizione per massimi e minimi sulla derivata seconda:

**Teorema 2.43** (Relazione tra Hessiana ed estremi).

Data  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  in  $x_0$  tale che  $\nabla f(x_0) = 0$  abbiamo le seguenti implicazioni:

1.  $x_0$  massimo locale  $\implies \nabla^2 f(x_0) \leq 0$  (la matrice hessiana in  $x_0$  è semidefinita negativa),
2.  $x_0$  minimo locale  $\implies \nabla^2 f(x_0) \geq 0$  (hessiana semidefinita positiva),
3.  $\nabla^2 f < 0$  (hessiana definita negativa)  $\implies x_0$  massimo locale,
4.  $\nabla^2 f > 0$  (hessiana definita positiva)  $\implies x_0$  minimo locale,

*Dimostrazione.*

1) Supponiamo per assurdo  $\nabla^2 f(x_0) \not\leq 0$ , cioè  $\exists v \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\nabla^2 f(x_0)[v, v] > 0$ . Sia  $g(t) = f(x_0 + tv)$ . Calcolando le derivate di  $g$  vediamo che:  $g(0) = f(x_0)$ ,  $g'(0) = \nabla f(x_0) \cdot v = 0$  e  $g''(0) = \nabla^2 f(x_0)[v, v] > 0$ , cioè 0 è un minimo locale stretto per  $g$ . Allora  $f(x_0 + tv) > f(x_0)$  per  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$  per qualche  $\varepsilon$ , che è assurdo dato che  $x_0$  è massimo locale.

2) Stessa dimostrazione sopra con le disuguaglianze al contrario.

3) Sappiamo che  $\nabla f(x_0) = 0$  e che  $\nabla^2 f(x_0) < 0$ . Poniamo

$$\delta = \min_{\lambda \in sp(\nabla^2 f(x_0))} |\lambda|.$$

Osserviamo che  $\delta > 0$  perché l'hessiana è definita negativa. Inoltre passando ad una base di autovettori e confrontando termine a termine i coefficienti vediamo che  $\nabla^2 f(x_0)[v, v] \leq$

$-\delta|v|^2$ . Per Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(x_0)[x - x_0]^2 + o(|x - x_0|^2) \leq \\ &\leq f(x_0) - \frac{\delta}{2}|x - x_0|^2 + o(|x - x_0|^2) \leq \\ &\leq f(x_0) - \frac{\delta}{4}|x - x_0|^2 \end{aligned}$$

per  $|x - x_0|$  molto vicino a 0. Vediamo allora che  $x_0$  è un massimo locale stretto.

4) Come il punto 3. □

**Definizione 2.44** (Punto di sella).

Se  $x_0$  è un **punto critico** ( $\nabla f(x_0) = 0$ ) ma non è massimo o minimo locale allora viene definito **punto di sella**.

*Osservazione 2.45.*

Se  $\nabla^2 f(x_0)$  è simmetrica allora

$$\nabla^2 f(x_0) \geq 0 \iff \lambda \geq 0, \forall \lambda \in sp(\nabla^2 f(x_0))$$

$$\nabla^2 f(x_0) \leq 0 \iff \lambda \leq 0, \forall \lambda \in sp(\nabla^2 f(x_0))$$

(segue dal teorema spettrale). In particolare, per  $n = 2$

$$\nabla^2 f(x_0) \geq 0 \iff \text{tr}(\nabla^2 f(x_0)) \geq 0 \text{ e } \det(\nabla^2 f(x_0)) \geq 0$$

$$\nabla^2 f(x_0) \leq 0 \iff \text{tr}(\nabla^2 f(x_0)) \leq 0 \text{ e } \det(\nabla^2 f(x_0)) \geq 0.$$

**Definizione 2.46** (Laplaciano).

Definiamo il **laplaciano** di  $f$  come

$$\Delta f(x_0) = \text{tr} \nabla^2 f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x_0).$$

**Definizione 2.47** (Funzione armonica).

Una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile due volte è **armonica** se verifica l'**equazione di Laplace**, ovvero

$$\Delta f = 0.$$

*Osservazione 2.48.*

Le funzioni lineari sono armoniche.

**Proposizione 2.49** (Estremi di una armonica).

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato. Una funzione  $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, armonica su  $U$  e tale che  $f|_U$  è differenziabile due volte ha massimi e minimi globali su  $\partial U$ .

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che il minimo di  $f$  non sia su  $\partial U$ , cioè  $\exists x_0 \in U$  tale che  $f(x_0) \leq f(x)$  per ogni  $x \in \bar{U}$  e  $f(x_0) < f(x)$  per ogni  $x \in \partial U$ . In particolare  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $f(x_0) \leq f(x) - \varepsilon$  per ogni  $x \in \partial U$ , quindi  $\exists \varepsilon' > 0$  tale che

$$f(x_0) < \min_{x \in \partial U} (f(x) - \varepsilon'|x - x_0|^2),$$

questo perché  $x_0 \in U$  e  $x \in \partial U$ , quindi  $|x - x_0|$  non scompare (dato che  $U$  è aperto,  $U \cap \partial U = \emptyset$ ) e quindi con  $\varepsilon'$  appropriato posso porre

$$\varepsilon < \varepsilon' \left( \min_{x \in \partial U} |x - x_0| \right)^2 \leq \varepsilon'|x - x_0|^2.$$

Consideriamo  $g(x) = f(x) - \varepsilon'|x - x_0|^2$ , vediamo allora che  $g(x_0) < \min_{x \in \partial U} g(x)$  e quindi  $g$  ha minimo in  $U$ , quindi  $\exists x_1 \in U$  tale che  $x_1$  è minimo assoluto di  $g$ , da cui vediamo per il **Criterio di Fermat** che  $\nabla g(x_1) = 0$  e derivando vediamo

$$\nabla^2 g(x_1) = \nabla^2 f(x_1) - 2\varepsilon' I \geq 0.$$

Prendiamo la traccia:

$$0 \leq \Delta f(x_1) - 2\varepsilon' n \stackrel{\text{armonica}}{=} -2\varepsilon' n,$$

che è assurdo.  $\neq$

□

## 2.5 Invertibilità locale e teorema di Dini

**Definizione 2.50** (Diffeomorfismo).

Una mappa  $f : M \rightarrow N$ , con  $M, N$  superfici differenziabili è detta **diffeomorfismo di classe  $C^k$**  se è di classe  $C^k$ , bigettiva e la sua inversa è ancora di classe  $C^k$ .

*Osservazione 2.51* (Nota categorica non data durante il corso).

Stiamo chiedendo che i diffeomorfismi siano morfismi nella categoria delle superfici  $C^k$ -differenziabili.

L'aggiunta di dimensioni rende difficile creare criteri per l'invertibilità globale. Definiamo allora un concetto di invertibilità locale:

**Definizione 2.52** (Locale invertibilità).

Data  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Fissato  $x_0 \in U$ ,  $f$  è **localmente invertibile** in  $x_0$  se esistono  $V$  intorno di  $x_0$  e  $W = f(V)$  intorno di  $f(x_0)$  tali che  $f|_V : V \rightarrow W$  è invertibile.

*Osservazione 2.53.*

Nel caso  $n = 1$  vediamo che se  $f \in C^1(I)$  e  $f'(x_0) \neq 0$  per  $x_0 \in I$  allora  $f$  è localmente invertibile e la sua inversa è  $C^1$ .

**Teorema 2.54** (Invertibilità locale).

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$ . Fissato  $x_0 \in U$ , se  $\det(\mathcal{D}f(x_0)) \neq 0$  allora esistono  $V$  e  $W$  intorno di  $x_0$  e  $f(x_0)$  rispettivamente tali che

$$f|_V : V \rightarrow W$$

è un diffeomorfismo  $C^1$ .

Inoltre se  $g = f|_V^{-1}$  si ha che per ogni  $x \in V$

$$\mathcal{D}g(f(x)) = (\mathcal{D}f(x))^{-1}$$

*Dimostrazione.*

Sia  $x_0 \in U$  tale che  $\mathcal{D}f(x_0)$  è invertibile. Per semplicità scriviamo  $A = \mathcal{D}f(x_0)^{-1}$ . Posto  $y_0 = f(x_0)$ , consideriamo  $B_\rho(x_0)$  e  $B_r(y_0)$  dove  $\rho$  è tale che

$$\|\mathcal{D}f(x) - \mathcal{D}f(x_0)\| \leq \frac{1}{2\|A\|} \quad \forall x \in B_\rho(x_0)$$

e  $r = \rho/(2\|A\|)$ .

Vogliamo mostrare che per ogni  $y \in B_r(y_0)$  esiste un unico  $x \in \overline{B_\rho(x_0)}$  tale che  $f(x) = y$ . Fissiamo allora  $y \in B_r(y_0)$  e consideriamo la funzione

$$T(x) = x + A(y - f(x)), \quad x \in \overline{B_\rho(x_0)}.$$

Per come abbiamo scelto  $\rho$  e  $r$  possiamo verificare che  $T$  è una contrazione su  $\overline{B_\rho(x_0)}$ :  
 $T$  è 1/2-lipschitziana)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}T(x)\| &= \|I - \mathcal{D}f(x_0)^{-1}\mathcal{D}f(x)\| = \\ &= \|\mathcal{D}f(x_0)^{-1}(\mathcal{D}f(x_0) - \mathcal{D}f(x))\| \leq \\ &\leq \|A\| \cdot \|\mathcal{D}f(x_0) - \mathcal{D}f(x)\| \stackrel{\text{scelta di } \rho}{\leq} \\ &\leq \frac{\|A\|}{2\|A\|} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Come per il caso ad una variabile, maggiore il modulo (o la norma in questo caso) della derivata con una costante garantisce Lipschitzianità.

$T(\overline{B_\rho(x_0)}) \subseteq \overline{B_\rho(x_0)}$  Fissiamo  $x \in \overline{B_\rho(x_0)}$ . Calcolando vediamo

$$\begin{aligned}|T(x) - x_0| &\leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |A(y - y_0)| \leq \\ &\leq \frac{\rho}{2} + \|A\|r = \frac{\rho}{2} + \|A\|\frac{\rho}{2\|A\|} = \rho,\end{aligned}$$

cioè  $T(x) \in \overline{B_\rho(x_0)}$ .

Avendo verificato che  $T$  è una contrazione, per il **Teorema delle contrazioni / Banach Caccioppoli** esiste un unico  $x = g(y) \in \overline{B_\rho(x_0)}$  tale che

$$T(x) = x \implies y = f(x) \text{ per invertibilità di } A.$$

Siano allora

$$W = B_r(y_0) \setminus f(\partial B_\rho(x_0)) \quad \text{e} \quad V = g(W) = f^{-1}(W) \subseteq B_\rho(x_0).$$

Osserviamo che sono aperti:

- $\partial B_\rho(x_0)$  è compatto, quindi  $f(\partial B_\rho(x_0))$  è compatto (e quindi chiuso). Il suo complementare ( $W$ ) in un aperto ( $B_r(y_0)$ ) è quindi un aperto di  $U$  (aperto in un aperto).
- $V$  è controimmagine di un aperto ( $W$ ) tramite una funzione continua ( $f$ ).

Vediamo inoltre che  $x_0 \in V$ . Mettendo insieme tutte queste informazioni vediamo che  $f$  è una bigezione tra  $V$  e  $W$  intorni aperti di  $x_0$  e  $y_0$  rispettivamente. È dunque ben definita  $g = f|_V^{-1} : W \rightarrow V$ .

Verifichiamo ora che  $g$  è continua su  $W$ . Questo equivale a mostrare che

$$\lim_{y' \rightarrow y} g(y') - g(y) = 0 \quad \forall y \in W.$$

Fissiamo quindi  $y \in W$  e poniamo  $x' = g(y')$ ,  $x = g(y)$ . Essendo  $T$  definita come sopra 1/2-Lipschitziana abbiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|x - x'| &\geq |T(x) - T(x')| = |x - x' + A(f(x') - f(x))| \geq \\ &\geq |x - x'| - |A(y' - y)| \geq |x - x'| - \|A\||y' - y|.\end{aligned}$$

Quindi  $2\|A\||y - y'| \geq |g(y) - g(y')|$ , ovvero  $g$  è  $2\|A\|$ -Lipschitziana, in particolare è continua.

Verifichiamo infine che  $g$  è differenziabile e che  $\mathcal{D}g(f(x)) = (\mathcal{D}f(x))^{-1} \doteq A_x$ . Questo equivale a mostrare che il limite della seguente espressione per  $y' \rightarrow y$  va a zero:

$$\begin{aligned} \frac{g(y') - g(y) - A_{g(y)}(y' - y)}{|y - y'|} &= \frac{x' - x - A_x(f(x') - f(x))}{|x - x'|} \frac{|x' - x|}{|y' - y|} = \\ &= \frac{\cancel{x'} - x - (\mathcal{D}f(x))^{-1}(\mathcal{D}f(x)(\cancel{x'} - x) + o(|x' - x|))}{|x - x'|} \frac{|x' - x|}{|y' - y|} = \\ &= (-A_x)o(1) \frac{|g(y') - g(y)|}{|y' - y|}. \end{aligned}$$

Essendo  $\frac{|g(y') - g(y)|}{|y' - y|}$  limitata da  $2\|A\|$  e dato che una lineare applicata a un  $o$ -piccolo rimane un  $o$ -piccolo dello stesso ordine abbiamo che l'espressione sopra è  $o(1)$ , dunque va a 0 come voluto. Dunque la derivata di  $g$  esiste e vale  $A_x = (\mathcal{D}f(x))^{-1}$ .

Infine, ricordando che possiamo calcolare  $(\mathcal{D}f(x))^{-1}$  a partire da  $\mathcal{D}f(x)$  tramite la regola di Cramer, si ha che se  $\mathcal{D}f(x)$  è continua allora lo è anche

$$(\mathcal{D}f(x))^{-1} = \mathcal{D}g(f(x)).$$

□

**Teorema 2.55** (Invertibilità locale con maggiore regolarità).

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^k(U)$  per  $k \geq 1$ . Fissato  $x_0 \in U$ , se  $\det(\mathcal{D}f(x_0)) \neq 0$  allora esistono  $V$  e  $W$  intorno aperti di  $x_0$  e  $f(x_0)$  tali che

$$f|_V : V \rightarrow W$$

è un diffeomorfismo di classe  $C^k$ .

*Dimostrazione.*

Stessa dimostrazione osservando in fondo che la regola di Cramer per l'inversa non cambia la regolarità delle funzioni coinvolte. □

*Osservazione 2.56.*

La condizione  $\det(\mathcal{D}f(x)) \neq 0$  per ogni  $x \in U$  NON garantisce l'invertibilità globale.

*Dimostrazione.*

Identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  ponendo  $e^z = \begin{pmatrix} \Re(\cos(z)) - \Im(\sin(z)) \\ \Im(\cos(z)) + \Re(\sin(z)) \end{pmatrix}$ . Sia  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la mappa data da  $p(z) = e^z$ . Il differenziale di  $p$  in  $z = x + iy$  è  $e^z \cdot = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}$  e il determinante di questo è  $e^{2x}$ . Questa quantità non è mai nulla, eppure la funzione è periodica lungo rette parallele all'asse immaginario e quindi in particolare non è iniettiva. □

**Proposizione 2.57** (Criterio per NON globale invertibilità).

Se una funzione  $f$  non è iniettiva allora se il dominio è connesso per archi e l'immagine è semplicemente connessa vediamo che  $f$  non può essere ovunque localmente invertibile.

*Dimostrazione.*

Dato che  $f$  non è iniettiva, esistono  $x \neq y$  tali che  $f(x) = f(y)$ . Sia  $\gamma$  un cammino da  $x$  a  $y$ . Osserviamo che  $f \circ \gamma$  è un loop nell'immagine. Se il codominio è semplicemente connesso posso deformare per omotopia  $\gamma$  in modo tale che  $f \circ \gamma$  diventi la mappa costante, che è chiaramente non localmente invertibile. Questo mostra che per qualche punto  $f$  non è localmente invertibile (addirittura tutto un cammino). □

**Notazione 2.58.**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Scriveremo in notazione abbreviata un punto di  $\Omega$  come  $(x_0, y_0)$  dove

$$x_0 = (z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

e

$$y_0 = (z_{n+1}, \dots, z_{n+m}) = (y_1, \dots, y_m).$$

Inoltre, se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile con

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

poniamo

$$\mathcal{D}f = (\mathcal{D}_x f \quad \mathcal{D}_y f) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array} \right).$$

Grazie all'invertibilità locale possiamo dimostrare il teorema delle funzioni implicite, o teorema di Dini:

**Teorema 2.59** (Teorema delle funzioni implicite).

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  di classe  $C^k$  e sia  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Supponiamo

$$\det(\mathcal{D}_y f(x_0, y_0)) \neq 0.$$

Allora esistono  $U$  intorno di  $x_0$  e  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^k$  tali che per ogni  $x \in U$  si ha

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0).$$

*Dimostrazione.*

Definiamo  $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  tramite  $\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y))$ . Osserviamo che

$$\mathcal{D}\tilde{f}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \mathcal{D}_x f(x_0, y_0) & \mathcal{D}_y f(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

da cui  $\det(\mathcal{D}\tilde{f}(x_0, y_0)) = \det(\mathcal{D}_y f(x_0, y_0)) \neq 0$ . Per il teorema di **Invertibilità locale**  $\tilde{f}$  è localmente invertibile, cioè esistono  $U \times V$  intorno di  $(x_0, y_0)$  e  $U \times W$  intorno di  $(x_0, f(x_0, y_0))$  tali che  $\tilde{f}|_{U \times V} : U \times V \rightarrow U \times W$  è invertibile.

Osserviamo che per come è definita  $\tilde{f}$  si ha che per  $(x, y) \in U \times W$

$$\tilde{f}^{-1}(x, y) = (x, \tilde{g}(x, y)) \quad \text{con } \tilde{g} : U \times W \rightarrow V \text{ di classe } C^k.$$

In particolare per ogni  $(x, y) \in U \times W$  si ha che

$$(x, y) = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x, y)) = \tilde{f}(x, \tilde{g}(x, y)) = (x, f(x, \tilde{g}(x, y))),$$

da cui  $f(x, \tilde{g}(x, y)) = y$ . Poniamo allora  $g(x) = \tilde{g}(x, f(x_0, y_0))$ , in modo che  $\forall x \in U$

$$f(x, g(x)) = f(x, \tilde{g}(x, f(x_0, y_0))) = f(x_0, y_0)$$

come voluto. □

**Corollario 2.60.**

Con le notazioni del teorema,

$$\mathcal{D}g(x) = -(\mathcal{D}_y f(x, g(x)))^{-1}(\mathcal{D}_x f(x, g(x))).$$

*Dimostrazione.*

In  $U$  abbiamo che  $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ , quindi differenziando

$$\mathcal{D}f(x, g(x)) = \mathcal{D}_x f(x, g(x)) + \mathcal{D}_y f(x, g(x))\mathcal{D}g(x) = 0,$$

da cui la tesi. □

Il teorema intuitivamente afferma quanto segue:  
 Considero una funzione  $f : X \times Y \rightarrow Y$  e guardo la curva di livello

$$\{f(x, y) = f(x_0, y_0)\}.$$

Se l'iperpiano tangente a questa curva di livello in  $(x_0, y_0)$  non è verticale ( $\mathcal{D}_y f(x_0, y_0) \neq 0$ ) allora per un opportuno intorno di  $x_0$  ( $U$ ) posso vedere la curva di livello come una superficie (approssimata dall'iperpiano di prima), che posso vedere come grafico di una funzione  $g : U \rightarrow Y$ . La funzione sarà banalmente la mappa che a  $x \in U$  associa il punto sulla curva di livello con quella ordinata, cioè il valore  $g(x)$  tale che  $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ .

Grazie a questa interpretazione risulta chiara la seguente generalizzazione del teorema:

**Corollario 2.61.**

Data  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $x_0 \in \Omega$  con  $\text{rk}(\mathcal{D}f(x_0)) = m$ , cioè ha rango massimo, allora esiste  $U$  intorno di  $x_0$  tale che  $\{f(x) = f(x_0)\} \cap U$  è il grafico di una funzione  $C^k$  in una opportuna base.

**Definizione 2.62** (Punti regolari).

I punti di  $\{f(x) = f(x_0)\}$  tali che  $\text{rk}(\mathcal{D}f(x_0))$  è massimo si dicono **punti regolari**.

*Osservazione 2.63.*

Il corollario sopra può essere espresso come:

“Le curve di livello sono localmente grafici nei loro punti regolari.”

## 2.6 Massimi e minimi vincolati

### 2.6.1 Sottovarietà

Spesso ci capiterà di studiare funzioni ristrette a un certo sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ . Una delle categorie più rilevanti di tali sottoinsiemi sono le

**Definizione 2.64** (Sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ ).

Un insieme  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  è una **sottovarietà** di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $m \leq n$  (anche detta una  **$m$ -sottovarietà**) di classe  $C^k$  se per ogni  $x \in M$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $x$  e una funzione

$$\varphi : B_{\mathbb{R}^m}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

diffeomorfismo di classe  $C^k$  tali che

$$\varphi(B_{\mathbb{R}^m}(0, 1)) = M \cap U.$$

Le mappe  $\varphi$  vengono dette **carte** della varietà e un loro insieme che copre la varietà è detto **atlante**.

Intuitivamente, le  $m$ -varietà sono oggetti che localmente assomigliano a  $\mathbb{R}^m$ . Più alta è la classe di continuità delle carte, più liscia dobbiamo immaginarci la varietà.

*Osservazione 2.65.*

Al posto di  $\varphi$  diffeomorfismo, per invertibilità locale possiamo richiedere  $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi) = m$  e  $\varphi$  iniettiva di classe  $C^k$ .

**Definizione 2.66** (Spazio tangente e spazio normale).

Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  una  $m$ -varietà differenziabile e, fissato  $x \in M$ , sia  $\varphi : B(0, 1) \rightarrow U$  il diffeomorfismo garantito dalla definizione. Definiamo lo **spazio tangente** a  $M$  in  $x$  come

$$T_x M \doteq \text{Imm}(\mathcal{D}\varphi(x))$$

e lo **spazio normale** a  $M$  in  $x$  come

$$(T_x M)^\perp.$$

*Osservazione 2.67.*

La definizione non dipende dall'intorno di  $x$  o dalla specifica carta. Per avere una varietà ben definita infatti le carte con immagini che si intersecano devono coincidere su quella intersezione e similmente per le restrizioni o estensioni.

*Osservazione 2.68.*

$T_x M$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $m$ , mentre  $(T_x M)^\perp$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $n - m$ .

## Relazione tra varietà e grafici

Vediamo che grafici e varietà sono concetti molto vicini, quasi equivalenti.

Mostriamo che le  $k$ -sottovarietà sono, almeno localmente e a meno di un cambio di coordinate, grafici di una opportuna funzione:

**Proposizione 2.69** (Ogni sottovarietà è localmente grafico).

*Ogni  $k$ -sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  è localmente grafico.*

*Dimostrazione.*

I grafici saranno i grafici delle carte in una opportuna base. Vediamo come si comporta una funzione simile alle carte:

Sia  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  iniettiva e scriviamola come  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  con  $\varphi_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  e  $\varphi_2 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ . Dato che  $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi) = k$ , scegliendo una base opportuna posso supporre  $\mathcal{D}\varphi_1$  invertibile, e quindi  $\varphi_1$  è localmente invertibile per teorema di **Invertibilità locale**. Definiamo allora  $\psi = \varphi \circ \varphi_1^{-1}$ , ovvero

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & (x, \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))) \end{array} .$$

Osserviamo che  $\text{Imm}(\varphi) = \text{Imm}(\psi) = \Gamma\varphi_2\varphi_1^{-1}$ .

Se quindi  $\varphi$  è una mappa iniettiva che ristretta a  $B_{\mathbb{R}^k}(0, 1)$  restituisce  $M \cap U$  (è una carta di  $M$ ) abbiamo appena mostrato che

$$M \cap U = \text{Imm}(\varphi|_{B_{\mathbb{R}^k}(0,1)}) = \Gamma\varphi_2\varphi_1^{-1}|_{B_{\mathbb{R}^k}(0,1)} .$$

□

Mostriamo ora che i grafici sono varietà:

**Proposizione 2.70** (Grafici sono varietà).

*Se  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  è una funzione di classe  $C^1$  allora il suo grafico  $\Gamma g \subseteq \mathbb{R}^n$  è una  $k$ -varietà differenziabile.*

*Dimostrazione.*

Definiamo

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \longmapsto & (x, g(x) + y) \end{array} .$$

Osserviamo che  $\psi$  è localmente un diffeomorfismo, infatti

$$\mathcal{D}\psi = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ \mathcal{D}g & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

è sempre invertibile. Sia ora  $\varphi(x) = \psi(x, 0)$  in modo che

$$\mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathcal{D}g \end{pmatrix},$$

il quale è sempre un diffeomorfismo in quanto ottenuto per restrizione. Per concludere osserviamo che  $\varphi(\mathbb{R}^k) = \Gamma g$ , dunque restringendo opportunamente il dominio a varie palle unitarie troviamo le carte della definizione di varietà. □

Abbiamo in realtà che le curve di livello sono varietà eccetto che per pochi punti:

**Proposizione 2.71** (Curve di livello sono varietà nei punti regolari).

Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  e fissato  $c \in \mathbb{R}^{n-k}$  definiamo

$$M = \{x \mid f(x) = c\}.$$

Nei punti dove  $\text{rnk}(\mathcal{D}f) = n - k$  si ha che  $M$  è una  $k$ -varietà differenziabile.

*Dimostrazione.*

Per il **Teorema delle funzioni implicite**, localmente ai punti con Jacobiano non nullo, si ha che  $M = \Gamma g$  con  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  e  $f(x, g(x)) = c$ . Questo conclude per il risultato precedente (2.70).  $\square$

**Proposizione 2.72** (Spazio tangente e normale ad un grafico).

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  e consideriamo  $M = \{x \mid f(x) = c\}$ . Sia  $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  di classe  $C^1$  tale che  $f(x, g(x)) = c$  in un intorno di  $z \in M$ .

Se  $z = (x_0, g(x_0))$  e  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una carta per  $z$  allora

$$T_z M = T_z \Gamma g = \text{Imm } \mathcal{D}\varphi(x_0) = \{(v, \mathcal{D}g(x_0)v) \in \mathbb{R}^n \mid v \in \mathbb{R}^k\}$$

e, posto  $f = (f_1, \dots, f_{n-k})$ ,

$$\text{Imm}(\mathcal{D}f(x_0))^\top = \text{Span}(\nabla f_1(x_0), \dots, \nabla f_{n-k}(x_0)) = (T_z \Gamma g)^\perp = (T_z M)^\perp.$$

*Dimostrazione.*

(\*) Ovvio ricordando che

$$\mathcal{D}\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathcal{D}g(x_0) \end{pmatrix}$$

(\*) Ricordando

$$\mathcal{D}f = (\mathcal{D}_x f \quad \mathcal{D}_y f)$$

e che per un corollario del **Teorema delle funzioni implicite** (2.60) si ha  $\mathcal{D}_x f + \mathcal{D}_y f \mathcal{D}g = 0$ , osserviamo che per un generico  $w = (v, \mathcal{D}g \cdot v) \in TM$  si ha

$$(\mathcal{D}f(x_0))w = (\mathcal{D}_x f(x_0) + \mathcal{D}_y f(x_0)\mathcal{D}g(z))v = 0v = 0,$$

cioè lo spazio delle righe di  $\mathcal{D}f(x_0)$  coincide con  $(T_z M)^\perp$ , ma lo spazio delle righe di  $\mathcal{D}f(x_0)$  è per definizione  $\text{Imm}(\mathcal{D}f(x_0))^\top$ .  $\square$

## 2.6.2 Sistema dei moltiplicatori di Lagrange

Vogliamo ora presentare la tecnica standard per capire se un punto di una funzione è un massimo o un minimo locale su un certo vincolo.

Una condizione necessaria è espressa dal seguente:

**Teorema 2.73** (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange).

Siano:  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un aperto,  $f_0 \in C^1(\Omega)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k) \in C^1(\Omega)$  su  $\mathbb{R}^k$  ed  $M = \{x \in \Omega : f(x) = c\}$  un vincolo. Se  $x_0 \in M$  è un punto di massimo o minimo per  $f_0$  sul vincolo allora i  $\{\nabla f_i\}_{i \in \{0, \dots, k\}}$  sono linearmente dipendenti, cioè esistono  $\lambda_0, \dots, \lambda_k$  non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0.$$

*Dimostrazione.*

Supponiamo che  $x_0$  sia un punto di minimo locale per  $f_0$  sul vincolo  $M$ , la cui costante caratteristica possiamo considerare uguale a 0 (a meno di traslazione, la dimostrazione è equivalente per  $c$  qualsiasi). Poniamo  $B = B_r(x_0) = \{x \in \Omega : |x - x_0| < r\}$  una palla

centrata in  $x_0$  tale che  $f_0(x_0) \leq f_0(x) \forall x \in M \cap \overline{B}$  (minimo locale).  
 Preso  $N > 0$ , poniamo

$$h_N(x) = f_0(x) + |x - x_0|^2 + N \sum_{i=1}^k f_i^2(x).$$

Osserviamo che  $h_N(x) > f_0(x)$  per  $x \neq x_0$  e  $h_N(x_0) = f_0(x_0)$ , cioè  $x_0$  è un punto di minimo di  $h_N$  su  $M \cap \overline{B}$ .

Sia  $x_N$  il minimo assoluto di  $h_N$  su  $\overline{B}$ . Per compattezza di  $\overline{B}$ , a meno di passare a sottosuccessioni,  $\lim_{N \rightarrow \infty} x_N = x^* \in \overline{B}$ , inoltre, per limitatezza di  $h_N(\overline{B})^4$ ,  $h_N(x_N)$  converge ad un  $d \in \mathbb{R}$ . Da queste osservazioni ricaviamo che:

$$N \sum_{i=1}^k f_i^2(x_N) = h_N(x_N) - f_0(x_N) - |x_N - x_0|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} d - f_0(x^*) - |x^* - x_0|^2,$$

da cui, dividendo per  $N$ , ricaviamo che:

$$\sum_{i=1}^k f_i^2(x_N) \rightarrow \sum_{i=1}^k f_i^2(x^*) = 0,$$

da cui  $x^* \in M$ .

Poiché  $x_N$  è il minimo di  $h_N$ , possiamo scrivere:

$$f_0(x^*) + |x^* - x_0|^2 \leftarrow f_0(x_N) + |x_N - x_0|^2 \leq h_N(x_N) \leq h_N(x_0) = f_0(x_0) \leq f_0(x^*),$$

da cui ricaviamo che  $|x^* - x_0| = 0$ , ovvero  $x^* = x_0 = \lim_{N \rightarrow +\infty} x_N$ .

Per il criterio di Fermat,

$$\nabla h_N(x_N) = 0 = \nabla f_0(x_N) + 2(x_N - x_0) + 2N \sum_{i=1}^k f_i(x_N) \nabla f_i(x_N).$$

Poniamo  $\mu_0^N = 1, \mu_i^N = 2N f_i(x_N)$ ; avremo che:

$$\sum_{i=0}^k \mu_i^N \nabla f_i(x_N) = -2(x_N - x_0).$$

Normalizziamo ponendo  $\tilde{\mu}_i^N = \frac{\mu_i^N}{\sqrt{\sum_j (\mu_j^N)^2}} \in [-1, 1]$ .

Osserviamo che  $\tilde{\mu}_i^N \rightarrow \lambda_i$  tali che  $\sum_{i=0}^k \lambda_i^2 = 1$  (in particolare sono tutti numeri reali).

Concludiamo quindi osservando

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0) \xleftarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \tilde{\mu}_i^N \nabla f_i(x_N) = -\frac{2(x_N - x_0)}{\sqrt{\sum_j (\mu_j^N)^2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0,$$

che è la tesi. □

*Osservazione 2.74.*

Se  $\text{rk}(\mathcal{D}f(x_0)) = k$  (cioè se  $M$  è regolare) allora i  $\{\nabla f_i\}$  sono linearmente indipendenti,

<sup>4</sup>continue mandano compatti in compatti e i compatti di  $\mathbb{R}$  sono limitati

cioè possiamo imporre  $\nabla f_0(x_0) = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0)$ .

Il sistema

$$\begin{cases} f(x_0) = c \\ \nabla f_0(x_0) = \sum_{i=1}^k \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(x_0) \end{cases}$$

è detto **sistema dei moltiplicatori di Lagrange**.

*Osservazione 2.75.*

Se  $M$  non è regolare esiste una combinazione lineare non banale della forma

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0) = 0,$$

in particolare nell'enunciato del teorema  $\lambda_0$  può essere nullo e non abbiamo più garanzia che  $\nabla f_0(x_0)$  si scriva come combinazione lineare degli altri gradienti.

Proponiamo un esempio di come svolgere un esercizio sui moltiplicatori di Lagrange:

**Esempio 2.76.**

Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x) = \sum_{i=1}^n e^{x_i}$  ed il vincolo

$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = |x|^2 - 1 = 0\}$ . Vogliamo calcolare i massimi ed i minimi di  $f$  su  $M$ .

Sappiamo che questi minimi esistono per il **Teorema di Weierstrass**, essendo  $M$  un compatto.

Calcoliamo le derivate da inserire nel sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = e^{x_i}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i.$$

Costruiamo il sistema dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \\ e^{x_i} = 2\lambda x_i \quad \forall i. \end{cases}$$

Osserviamo che la quantità  $e^{x_i}$  è sempre positiva e mai nulla, dunque deve aversi che  $x_i \neq 0 \forall i, \lambda \neq 0$ .

Dividendo per  $x_i$  nella seconda equazione del sistema ricaviamo che per ogni  $i$  deve aversi:

$$\frac{e^{x_i}}{x_i} = 2\lambda.$$

Questo si traduce nel verificare che, comunque presi due indici  $i$  e  $j$ ,  $\frac{e^{x_i}}{x_i} = \frac{e^{x_j}}{x_j}$ , cioè dobbiamo capire quando la funzione ausiliaria  $\phi(x) = \frac{e^x}{x}$  è iniettiva. Con uno studio della derivata prima  $\phi'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$  ricaviamo che la funzione  $\phi|_{[-1,1]}$  è iniettiva e dunque, sul vincolo,  $x_i = x_j \quad \forall i, j$ .

A questo punto dalla prima equazione del sistema ricaviamo che  $x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $\forall i$  ed infine osserviamo che:

$$ne^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) > f\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = ne^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Dunque  $f|_M$  ha per minimo assoluto  $ne^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}$  e per massimo assoluto  $ne^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ .

## 2.7 Funzioni Omogenee e Radiali

**Definizione 2.77** (Cono).

Un sottoinsieme  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  è un **cono (lineare)** se  $\forall x \in \Omega, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$  abbiamo che  $\lambda x \in \Omega$ .

*Osservazione 2.78.*

Possiamo definire su uno spazio vettoriale generale i **coni algebrici**, che sono chiusi per prodotto per scalari non nulli. La definizione sopra non coincide con l'applicazione di questa a  $\mathbb{R}$  dato che consideriamo solo scalari positivi. (con la definizione generale troveremmo i “coni doppi”).

**Definizione 2.79** (Funzione positivamente omogenea).

Sia  $\Omega$  un cono in  $\mathbb{R}^n$ . Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\gamma$ -**omogenea** se  $f(\lambda x) = \lambda^\gamma f(x)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Osservazione 2.80.*

Come prima, la definizione si può facilmente estendere a spazi vettoriali generici (a patto di definire una mappa  $\mathbb{K}^\times \rightarrow \mathbb{R}^+$ ) e in realtà quella riportata coincide con l'omogeneità **positiva**.

**Proposizione 2.81** (Continuità in 0 delle omogenee).

Sia  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua positivamente  $\gamma$ -omogenea **NON** costante. Allora  $f$  è continua in 0 se e solo se  $\gamma > 0$ .

*Dimostrazione.*

$\gamma < 0$ ) Consideriamo  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale per cui  $f(x_0) \neq 0$ . Segue che

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^\gamma f(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0)}{\lambda^{-\gamma}} = +\infty$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che  $-\gamma > 0$ .

$\gamma = 0$ ) Consideriamo  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tali che  $f(x) \neq f(y)$ , che esistono in quanto  $f$  non è costante per ipotesi. Allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(x) = f(x) \neq f(y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda y)$$

che mostra la non continuità di  $f$  in 0.

$\gamma > 0$ ) Sia  $m = \max_{|x|=1} |f(x)| \in \mathbb{R}$  e osserviamo che

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{|x| \rightarrow 0} |x|^\gamma |f(\hat{x})| \leq \lim_{|x| \rightarrow 0} m|x|^\gamma = 0.$$

□

Cerchiamo di capire quando le omogenee sono differenziabili.

**Proposizione 2.82** (Differenziabilità in 0 delle omogenee).

Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è positivamente  $\gamma$ -omogenea e continua abbiamo che  $f$  è differenziabile in 0 se e solo se  $\gamma > 1$  o  $\gamma = 1$  e  $f$  è lineare.

*Dimostrazione.*

Per quanto detto, necessariamente  $\gamma \geq 0$ . Se  $\gamma = 0$  allora  $f$  non è continua in 0 oppure è costante. Se siamo nel primo caso non è chiaramente differenziabile, se siamo nel secondo  $f$  è anche 1-omogenea e lineare. Se invece  $\gamma > 0$  allora l'unica estensione per continuità di  $f$  in 0 è  $f(0) = 0$  (unico numero reale invariante se moltiplicato per un qualsiasi scalare non nullo).

$\gamma > 1$ ) Per  $|x| \rightarrow 0$  si ha che

$$|f(x)| = |x|^\gamma \left| f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq \underbrace{\left( \sup_{|x|=1} |f(x)| \right)}_{\text{costante}} |x|^\gamma = o(|x|),$$

quindi

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{|x|} = \lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{o(|x|)}{|x|} = \lim o(1) = 0,$$

in particolare  $f$  è differenziabile.

$0 < \gamma < 1$ ) Se  $f(\partial B(0, 1)) = \{0\}$  allora  $f$  è costante nulla e siamo nel caso  $\gamma = 1$  e  $f$  lineare. Se  $f(\partial B(0, 1)) \neq \{0\}$  allora consideriamo  $a \in \mathbb{R}^n$  tale che  $|a| = 1$  e  $f(a) \neq 0$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(ta) - f(0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(ta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} |ta|^{\gamma-1} f\left(\frac{ta}{|ta|}\right) = \\ &= (|a|^{\gamma-1} f(a)) \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\gamma-1} = \\ &= \pm \infty, \end{aligned}$$

quindi esiste una direzione per cui  $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{|x|}$  non è definito, cioè il limite non è definito.

$\gamma = 1$ ). Verifichiamo che  $f$  è differenziabile se e solo se  $f$  è lineare:

$\Leftarrow$ ) Ovvio dato che le lineari sono per definizione 1-omogenee e sono differenziabili per definizione di differenziabilità.

$\Rightarrow$ ) Sviluppriamo in 0 con Taylor

$$f(x) = f(0) + \mathcal{D}f(0)x + R(x) = \nabla f(0)x + R(x)$$

con  $R(x) = o(|x|)$ . Osserviamo che per  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \frac{f(tx)}{t} = \nabla f(0)x + \frac{R(tx)}{t|x|}|x|.$$

Osserviamo che  $t \rightarrow 0 \implies tx \rightarrow 0$ , dunque  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(tx)}{t|x|} = 0$  e quindi passando al limite

$$f(x) = \nabla f(0)x,$$

ovvero  $f$  è lineare. □

**Teorema 2.83** (Eulero).

Sia  $A$  un cono aperto in  $\mathbb{R}^n$  allora se  $f$  è differenziabile su  $A$  abbiamo che  $f$  è  $\alpha$ -omogenea se e solo se  $\nabla f(x)x = \alpha f(x)$  per ogni  $x \in A$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $x \in A$  fissato e poniamo  $F(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha}$ .  $f$  è  $\alpha$ -omogenea lungo la direzione di  $x$  se e solo se  $F(t) = f(x)$  per ogni  $t > 0$ .

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{(f(tx))'t^\alpha - f(tx)(t^\alpha)'}{t^{2\alpha}} = \\ &= \frac{\nabla f(tx)xt^\alpha - f(tx)\alpha t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} = \\ &= \frac{\nabla f(tx)xt - \alpha f(tx)}{t^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $F(t) = f(x)$  per ogni  $t > 0$  è equivalente a  $F$  costante, quindi poniamo  $F' = 0$  per ogni  $t$ , in particolare per  $t = 1$  si ha  $\nabla f(x)x - \alpha f(x) = 0$ .

Viceversa, se  $\nabla f(x)x - \alpha f(x) = 0$  per ogni  $x$  allora vale per  $tx$ , quindi ritroviamo  $F'(t) = 0$  da cui segue che  $f$  è  $\alpha$ -omogenea. □

Studiamo ora la seguente classe di funzioni:

**Definizione 2.84** (Funzione radiale).

Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è **radiale** se  $f(x) = \varphi(|x|)$  con  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposizione 2.85** (Gradiente, Hessiana e Laplaciano di radiali).

Se  $f$  è radiale con la notazione sopra

1. Se  $\varphi$  è  $C^1$  allora  $\nabla f(x) = \varphi'(|x|) \frac{x}{|x|}$

2. Se  $\varphi$  è  $C^2$  allora

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(|x|) = \varphi''(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right).$$

3. Se  $\varphi$  è  $C^2$  allora

$$\Delta f = \varphi''(|x|) + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} (n-1).$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo prima  $\nabla|x|$  e  $\nabla \frac{1}{|x|}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} |x| = \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\sum |x_i|^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} \sum |x_i|^2}{\sqrt{\sum |x_i|^2}} = \frac{1}{2|x|} 2x_k = \frac{x_k}{|x|}.$$

$$\nabla|x| = \left( \frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|} \right) = \frac{x}{|x|}.$$

$$\nabla \frac{1}{|x|} = -\frac{1}{|x|^2} \nabla|x| = -\frac{1}{|x|^2} \frac{x}{|x|} = -\frac{x}{|x|^3}.$$

Siamo ora equipaggiati per svolgere i conti richiesti:

1)

$$\nabla f(x) = \nabla \varphi(|x|) = (\nabla \varphi)(|x|) \nabla|x| = \varphi'(|x|) \frac{x}{|x|},$$

in particolare osserviamo che  $\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi(|x|)) = \varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|}$ .

2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} (\varphi(|x|)) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varphi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} \right) = \\ &= \varphi''(|x|) \frac{x_j}{|x|} \frac{x_i}{|x|} + \varphi'(|x|) \left( \delta_{ij} \frac{1}{|x|} - x_i \frac{x_j}{|x|^3} \right) = \\ &= \varphi''(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right). \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) = \varphi''(|x|) \left( \sum \frac{x_i x_i}{|x|^2} \right) + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} \left( \sum 1 - \left( \sum \frac{x_i x_i}{|x|^2} \right) \right) = \\ &= \varphi''(|x|) + \frac{\varphi'(|x|)}{|x|} (n-1). \end{aligned}$$

□

*Osservazione 2.86.*

Le funzioni radiali armoniche sono tali che  $f(x) = \varphi(|x|)$  e  $\Delta f = 0$ , quindi possiamo trovarle studiando l'equazione differenziale

$$u'(t) + (n-1) \frac{u(t)}{t} = 0$$

e poi integrando  $u = \varphi'$  per trovare  $\varphi$ .

## 2.8 Insiemi convessi

**Notazione 2.87** (Segmento).

Dati  $x, y \in V$  con  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ , indichiamo con  $[x, y] = [y, x]$  il **segmento** che congiunge  $x$  e  $y$ , ovvero

$$[x, y] = \{x + t(y - x) \mid t \in [0, 1]\}$$

**Definizione 2.88** (Insieme Convesso).

Dato  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ,  $C \subseteq V$  è **convesso** se per ogni  $x, y \in C$ ,  $[x, y] \subseteq C$ .

*Osservazione 2.89.*

L'intersezione di convessi è convessa, infatti se  $x, y \in A \cap B$  con  $A$  e  $B$  convessi allora  $[x, y] \subseteq A$  e  $[x, y] \subseteq B$ , quindi  $[x, y] \subseteq A \cap B$ .

**Definizione 2.90** (Combinazione convessa).

Dati  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ , una loro **combinazione convessa** è data da  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  e  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**Proposizione 2.91** (Caratterizzazione dei convessi).

Un insieme  $C$  è convesso se e solo se è chiuso per combinazioni convesse.

*Dimostrazione.*

$\Leftarrow$ ) Ovvio dato che il segmento è l'insieme di tutte le combinazioni convesse di due punti.

$\Rightarrow$ ) Procediamo per induzione su  $n$ . Chiaramente per  $n = 1$  e  $n = 2$  la tesi vale per quanto detto. Mostriamo quindi che se vale per  $n$  vale anche per  $n + 1$ . Consideriamo allora la seguente combinazione convessa di  $x_1, \dots, x_{n+1}$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Sia  $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Osserviamo che  $\sum_{i=1}^n \lambda_i / \lambda_0 = 1$ , quindi  $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i$  è una combinazione convessa di  $n$  termini e per ipotesi induttiva restituisce un elemento  $y \in C$ . Osserviamo infine che

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda_0 y + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Dato che  $\lambda_0 + \lambda_{n+1} = 1$  (la combinazione iniziale era convessa) e  $y, x_{n+1} \in C$  applicando l'ipotesi di convessità abbiamo che  $\lambda_{n+1} x_{n+1} \in C$  come volevasi dimostrare.  $\square$

**Definizione 2.92** (Inviluppo convesso).

Dato un insieme  $S$ , il suo **inviluppo convesso** è definito come il più piccolo insieme convesso che contiene  $S$  e si indica con  $co(S)$ . È possibile verificare che  $co(S)$  è l'unione delle combinazioni convesse di punti in  $S$ .

**Definizione 2.93** (Funzione convessa).

Sia  $\Omega$  un insieme convesso, una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è **convessa** se  $\forall x, y \in \Omega$  e  $\forall t \in [0, 1]$  abbiamo che

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Con la seguente definizione e proposizione avremo una idea geometrica di cosa rappresentano le funzioni convesse:

**Definizione 2.94** (Epigrafico).

Data  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , il suo **epigrafico** consiste nel seguente insieme:

$$Epi(f) = \{(x, a) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}.$$

*Osservazione 2.95.*

Geometricamente l'epigrafico è la regione dello spazio che “sta sopra” il grafico.

**Proposizione 2.96** (Relazione tra funzioni convesse ed epigrafico).

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  convesso è convessa se e solo se  $Epi(f) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$  è convesso.

*Dimostrazione.*

$\implies$ ) Consideriamo  $(x_0, a_0), (x_1, a_1) \in Epi(f)$ , ovvero coppie in  $\Omega \times \mathbb{R}$  tali che  $f(x_0) \leq a_0$  e  $f(x_1) \leq a_1$ . Dato che  $f$  è convessa, per ogni  $t \in [0, 1]$  si ha

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \leq ta_1 + (1-t)a_0,$$

cioè ogni punto nel segmento che congiunge  $(x_0, a_0)$  e  $(x_1, a_1)$  (dato dai punti  $(tx_1 + (1-t)x_0, ta_1 + (1-t)a_0)$  al variare di  $t \in [0, 1]$ ) si trova sopra al grafico di  $f$ , e quindi sta nell'epigrafico come volevamo.

$\impliedby$ ) Siano  $x_0, x_1 \in \Omega$ . Osserviamo che i punti  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x_1, f(x_1))$  appartengono al grafico di  $f$  e quindi anche all'epigrafico di  $f$ . Essendo  $Epi(f)$  convesso abbiamo che per ogni  $t \in [0, 1]$

$$(tx_0 + (1-t)x_1, tf(x_0) + (1-t)f(x_1)) \in Epi(f)$$

ovvero

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

che è la definizione di convessità per una funzione. □

*Osservazione 2.97.*

A differenza della differenziabilità, la convessità è una proprietà unidimensionale, ovvero se  $\Omega$  è convesso e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  allora  $f$  è convessa se e solo se  $f|_r$  è convessa per ogni retta  $r$  (considerata in  $\Omega$ ).

Vediamo ora, come per il caso delle funzioni ad una variabile, come mettere in relazione la convessità con le derivate della funzione.

**Proposizione 2.98** (Relazione tra convesse e derivate).

Sia  $\Omega$  un aperto convesso di  $\mathbb{R}^n$  allora

- Se  $f \in C^1(\Omega)$  allora  $f$  è convessa se e solo se  $\forall x_0, x_1 \in \Omega$  si ha

$$(\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0) \geq 0$$

- Se  $f \in C^2(\Omega)$  allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $f$  è convessa.
2. Per ogni  $x \in \Omega$  la matrice Hessiana in  $x$  è semidefinita positiva.
3. Per ogni  $x_0, x_1 \in \Omega$ ,  $f(x_1) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x_1 - x_0)$ .

*Dimostrazione.*

Per alleggerire la notazione poniamo  $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$  quando questi sono definiti. Definiamo inoltre  $\varphi(t) = f(x_t)$ . Osserviamo che  $f$  è convessa se e solo se  $\varphi(t)$  è convessa per ogni  $x_0, x_1$ . Per quanto sappiamo sulle convesse in una variabile, e dato che abbiamo assunto  $f$  almeno  $C^1$  in ogni proposizione, questo è equivalente a richiedere  $\varphi'(t)$  crescente (per il caso ad una variabile). Osserviamo inoltre che

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}f(x_t) = \nabla f(x_t) \frac{d}{dt}x_t = \nabla f(x_t)(x_1 - x_0).$$

\*)  $\implies$ ) Come visto nelle note preliminari,  $f$  convessa implica  $\varphi'$  crescente. In particolare  $\varphi'(1) - \varphi'(0) \geq 0$ , da cui

$$0 \leq \nabla f(x_1)(x_1 - x_0) - \nabla f(x_0)(x_1 - x_0) = (\nabla f(x_1) - \nabla f(x_0))(x_1 - x_0).$$

$\Leftarrow$ ) Consideriamo  $t > s$  entrambi in  $[0, 1]$  e definiamo  $x'_0 = x_s$ ,  $x'_1 = x_t$ . Dato che l'espressione vale per ogni  $x_0, x_1$ , vale in particolare per  $x'_0$  e  $x'_1$ , quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_t - x_s) = \\ &= (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_1 - x_0)(t - s) \stackrel{1 \geq t-s > 0}{\leq} \\ &\leq (\nabla f(x_t) - \nabla f(x_s))(x_1 - x_0) = \varphi'(t) - \varphi'(s). \end{aligned}$$

Dunque per l'arbitrarietà di  $t, s$  ricaviamo che  $\varphi'$  è crescente, che come detto è equivalente a  $f$  convessa.

★) Facciamo alcune osservazioni preliminari. Essendo  $f$  di classe  $C^2$ ,  $\varphi''$  è definita e continua, quindi per quanto sappiamo sulle funzioni convesse ad una variabile,  $f$  è convessa se e solo se  $\varphi''(t) \geq 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$  e per ogni  $x_1, x_0 \in \Omega$ . Calcoliamo allora  $\varphi''$ :

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \frac{d}{dt} \varphi'(t) = \frac{d}{dt} \nabla f(x_t)(x_1 - x_0) = \nabla^2 f(x_t) \frac{dx_t}{dt} (x_1 - x_0) = \\ &= \nabla^2 f(x_t) [x_1 - x_0]^2 = (x_1 - x_0)^\top H_f(x_t) (x_1 - x_0). \end{aligned}$$

1  $\iff$  2) Vale la seguente catena di equivalenze:

$$\begin{aligned} & f \text{ convessa} \\ & \varphi''(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \forall x_0, x_1 \in \Omega \\ & (x_1 - x_0)^\top H_f(x_t) (x_1 - x_0) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \forall x_0, x_1 \in \Omega \\ & H_f(x_t) \text{ è semidefinita positiva } \forall t \in [0, 1] \forall x_0, x_1 \in \Omega \\ & H_f \text{ è semidefinita positiva su } \Omega \end{aligned}$$

dove l'ultima equivalenza vale perché  $x \in \Omega$ ,  $x = tx + (1-t)x$  e perché  $x_t \in \Omega$ .

2  $\implies$  3) Consideriamo l'**Espansione di Taylor** con resto di Lagrange

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\xi) [x - x_0]^2,$$

dove  $\xi \in [x, x_0]$ . Essendo  $H_f$  semidefinita positiva su  $\Omega$  (punto precedente) osserviamo che l'ultimo addendo è non negativo, dunque

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

e in particolare ponendo  $x = x_1$  appiamo l'espressione cercata.

3  $\implies$  1) Ricordiamo che  $f$  è convessa se e solo se lo è il suo epigrafoico è convesso. Definendo

$$h_{x_0}(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0)$$

osserviamo che

$$Epi(f) = \bigcap_{x_0 \in \Omega} Epi(h_{x_0}(x)),$$

infatti se un punto  $(x_0, a)$  non appartiene all'epigrafoico di  $f$  l'iperpiano  $h_{x_0}(x)$  ha epigrafoico che lo esclude. Essendo l'intersezione di convessi convessa ed essendo l'epigrafoico di un iperpiano convesso abbiamo la tesi.  $\square$

Diamo ora un criterio per capire quando funzioni convesse sono continue:

**Definizione 2.99** (Locale limitatezza).

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega$  aperto si dice **localmente limitata** se per ogni  $x \in \Omega$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $B_\varepsilon(x) \subseteq \Omega$  e  $f|_{B_\varepsilon(x)}$  è limitata.

**Teorema 2.100** (Convessa localmente limitata è localmente lipschitziana).

Se  $\Omega$  è un convesso aperto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e localmente limitata allora  $f$  è localmente lipschitziana. In particolare  $f$  è continua.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $0 \in \Omega$  e  $f(0) = 0$ . Per la locale limitatezza esistono  $r > 0, M > 0$  tali che  $\sup_{|x| \leq r} f(x) \leq M$ . Sia  $v \in \overline{B_r(0)}$  e consideriamo

$$w = \begin{cases} (r/|v|)v & \text{se } v \neq 0 \\ v = 0 & \text{se } v = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che per  $\lambda = (|v|/r) \in [0, 1]$  abbiamo  $v = \lambda w + (1 - \lambda)0$ , quindi per la convessità di  $f$

$$f(v) \leq \lambda f(w) + (1 - \lambda)f(0) = \frac{|v|}{r} f(w) \leq \frac{M}{r} |v|.$$

Osserviamo ora che  $0 = \mu v + (1 - \mu)(-w)$  con  $\mu = r/(|v| + r) \in (0, 1]$ , quindi

$$0 = f(0) \leq \mu f(v) + (1 - \mu)f(-w)$$

$$f(v) \geq -\frac{1 - \mu}{\mu} f(-w) = \frac{\mu - 1}{\mu} f(-w) = -\left(\frac{|v|}{r}\right) f(-w) \geq -\frac{M}{r} |v|.$$

Abbiamo quindi verificato che  $|f(v)| \leq \frac{M}{r} |v|$ , da cui

$$|f(v_1 - v_2)| \leq \frac{M}{r} |v_1 - v_2|,$$

ovvero  $f$  è localmente Lipschitziana. □

*Osservazione 2.101.*

La locale limitatezza è una condizione necessaria. Per esempio esistono spazi dove delle mappe lineari non sono continue ma chiaramente ogni mappa lineare è convessa (per esempio per il primo punto della proposizione precedente).

*Osservazione 2.102.*

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e  $B = \text{co}(F)$  con  $F$  finito osserviamo che

$$\sup_{x \in B} f(x) = \max_{x \in F} f(x).$$

*Osservazione 2.103.*

Se la dimensione dello spazio vettoriale in cui consideriamo  $\Omega$  è finita allora l'ipotesi di locale limitatezza non è necessaria, più precisamente

**Proposizione 2.104.**

Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  è un aperto convesso e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa allora  $f$  è localmente limitata.

*Dimostrazione.*

Essendo  $\Omega$  aperto, per ogni  $p \in \Omega$  esiste  $r > 0$  tale che  $\overline{B_r(p)} \subseteq \Omega$ . Consideriamo le palle in norma 1, che possiamo fare per l'equivalenza delle norme (1.57). Sia  $F = \{p, p \pm re_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ . Osserviamo che per ogni  $x \in \overline{B_r(p)}$ ,  $x \in \text{co}(F)$ , cioè  $x = \sum_{i=1}^{|F|} \lambda_i \xi_i$  per  $\xi_i \in F$  e per la convessità di  $f$

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{|F|} \lambda_i f(\xi_i) \leq \max_{\xi \in F} f(\xi),$$

quindi  $f$  è localmente limitata. □

## 2.9 Retta di regressione (minimi quadrati)

Dati  $x_1, \dots, x_m$  distinti e altri  $y_1, \dots, y_m$  valori cerchiamo una funzione lineare della forma  $y = ax + b$  che meglio approssima l'andamento dei punti  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ .

Possiamo farlo in tanti modi, ma uno di quelli che si è rivelato più significativo è il **metodo dei minimi quadrati**, chiamato così perché cerchiamo il minimo della seguente funzione:

**Definizione 2.105** (Funzionale d'errore).

Dati  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m$  come sopra e una retta  $y = ax + b$  definiamo il **funzionale d'errore** come

$$\mathcal{E}(a, b) = \sum_{j=1}^m (y_j - (ax_j + b))^2.$$

Più esplicitamente cerchiamo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $\mathcal{E}(a, b)$  abbia valore minimo.

**Proposizione 2.106.**

*Il funzionale di errore è strettamente convesso, in particolare il minimo esiste.*

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\mathcal{E}(a, b)$  è di classe  $C^\infty$ . Costruiamo allora la matrice Hessiana. Per farlo calcoliamo le derivate parziali in  $a, b$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a}(a, b) &= - \sum_{j=1}^m 2(y_j - (ax_j + b))x_j \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b}(a, b) &= - \sum_{j=1}^m 2(y_j - (ax_j + b)) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a^2}(a, b) &= \sum_{j=1}^m 2x_j^2 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial b \partial a}(a, b) &= \sum_{j=1}^m 2x_j = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a \partial b}(a, b) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial b^2}(a, b) &= \sum_{j=1}^m 2 = 2m. \end{aligned}$$

Segue quindi che, ponendo  $u = \sum_{i=1}^m e_i$  e  $x = (x_1, \dots, x_m)^\top$ , la matrice Hessiana ha forma:

$$H_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \sum 2x_j^2 & \sum 2x_j \\ \sum 2x_j & 2m \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix}.$$

Dato che  $|x|^2 > 0$  e che  $|u|^2|x|^2 > |x \cdot u|^2$  per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ( $u$  e  $x$  non sono proporzionali perché gli  $x_i$  sono distinti), la matrice Hessiana sopra è definita positiva per la regola di Jacobi (o metodo nord-ovest o dei minori principali) e quindi  $\mathcal{E}(a, b)$  è strettamente convessa.  $\square$

Dato che  $\mathcal{E}(a, b)$  è almeno  $C^2$  su tutto  $\mathbb{R}^2$  e che  $\mathbb{R}^2$  non ha un bordo, possiamo trovare i minimi ponendo  $\nabla \mathcal{E}(a, b) = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = 0 \iff \sum y_j x_j = \sum ax_j^2 + bx_j = a \sum x_j^2 + b \sum x_j \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b} = 0 \iff \sum y_j = \sum ax_j + b = a \sum x_j + mb \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y \cdot x = a|x|^2 + bu \cdot x \\ y \cdot u = ax \cdot u + b|u|^2 \end{cases}$$

in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y \cdot u \end{pmatrix}.$$

Come notato prima, la matrice nell'equazione è l'Hessiana di  $\mathcal{E}(a, b)$ , che come osservato è definita positiva, quindi la soluzione è unica e ricavabile calcolando l'inversa dell'Hessiana.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{|x|^2|u|^2 - |x \cdot u|^2} \begin{pmatrix} |u|^2 & -x \cdot u \\ -x \cdot u & |x|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \cdot y \\ y \cdot u \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{|x|^2|u|^2 - |x \cdot u|^2} \begin{pmatrix} |u|^2(x \cdot y) - (x \cdot u)(y \cdot u) \\ |x|^2(y \cdot u) - (x \cdot u)(x \cdot y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Capitolo 3

# Teoria della Misura e Calcolo Integrale

### 3.1 Teoria della Misura

L'obiettivo che ci prefiggiamo in questo nuovo capitolo è quello di fornire uno strumento che ci permetta di calcolare il volume di un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  o, il che è equivalente, fornire una nozione di integrale per le funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , che sia stabile quando si passa al limite.

Partiamo dalla seguente:

**Definizione 3.1** ( $\sigma$ -algebra).

Dato un insieme  $X$ ,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è una sua  $\sigma$ -algebra se:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$ ;
- $\forall E \in \mathcal{E}, X \setminus E \in \mathcal{E}$ , in particolare  $X \in \mathcal{E}$ ;
- Comunque dati  $E_i \in \mathcal{E}$  al variare di  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$  e quindi  $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}$ .

Intuitivamente ciò che vogliamo fare è replicare un sottoanello con le operazioni di chiusura per unione e passaggio al complementare, cioè selezionare quei sottoinsiemi di  $X$  stabili per le operazioni topologiche fondamentali.

*Osservazione 3.2.*

L'intersezione, anche infinita, di  $\sigma$ -algre è ancora una  $\sigma$ -algebra, in particolare data  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è sempre possibile definire:

$$\sigma A(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcap \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{E} \right\}$$

**Definizione 3.3** (Algebra di Borel).

Dato  $X$  spazio metrico o topologico,  $\mathcal{A} = \{\text{Insiemi aperti di } X\}$ , si chiama  $\sigma$ -algebra di Borel la  $\sigma$ -algebra:

$$\mathcal{B}(X) = \sigma A(\mathcal{A}).$$

*Osservazione 3.4.*

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  per differenza di cardinalità, infatti  $|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^{|\mathbb{R}^n|} = 2^{\mathfrak{c}}$ , mentre  $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ .

**Definizione 3.5** ( $\sigma$ -subadditività/additività).

Data una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$  e una mappa  $m : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$  affermiamo che  $m$  è

- **$\sigma$ -subadditiva** se  $\forall E_i \in \mathcal{E}$

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i m(E_i)$$

- **$\sigma$ -additiva** se, dato  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$  tale che  $i \neq j \implies E_i \cap E_j = \emptyset$ , si ha

$$m\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} m(E_i).$$

**Definizione 3.6** (Spazio di misura).

Data  $\mathcal{E}$  una  $\sigma$ -algebra e  $m : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$  diciamo che  $m$  è una **funzione misura** se è  $\sigma$ -additiva su  $\mathcal{E}$ . In questo caso la tripletta  $(X, \mathcal{E}, m)$  è detta uno **spazio di misura**.

*Osservazione 3.7* (Proprietà delle misure).

Data una funzione di misura  $m$  si ha che:

- $m(\emptyset) = 0$ ;
- $m$  è  $\sigma$ -subadditiva;
- $m$  è monotona, infatti presi  $A \subseteq B$ , avremo che  $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$ ;
- $E_i \subseteq E_{i+1} \implies m\left(\bigcup_i E_i\right) = \lim_i m(E_i) = \sup_i m(E_i)$ ;
- $E_i \supseteq E_{i+1}$  e  $m(E_0) < \infty \implies m\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i m(E_i) = \inf_i m(E_i)$ .

**Definizione 3.8** (Insieme trascurabile).

Data una misura  $m$  ed un insieme  $N \in \mathcal{E}$ ,  $N$  è detto **insieme trascurabile** se  $m(N) = 0$ .

*Osservazione 3.9.*

Per monotonia della misura, se  $N$  è trascurabile e  $N' \subseteq N$ , con  $N' \in \mathcal{E}$  allora  $N'$  è trascurabile.

**Definizione 3.10** (Spazio di misura completo).

Uno spazio di misura  $(X, \mathcal{E}, m)$  si dice **completo** se vale l'implicazione:

$$N' \subseteq N, \text{ con } N \text{ trascurabile, } \implies N' \in \mathcal{E}.$$

**Definizione 3.11** (Misura di Borel).

Dato lo spazio di misura  $(X, \mathcal{E}, m)$ , se  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{E}$ , cioè  $m$  è definita sui Boreliani, affermiamo che  $m$  è una **misura di Borel**

**Definizione 3.12** (Misure regolari).

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura con  $X$  metrico e  $\mu$  di Borel. Affermiamo che  $\mu$  è **regolare** se per ogni  $E \in \mathcal{E}$

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \supseteq E \text{ aperto}\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E \text{ compatto}\}.$$

**Definizione 3.13** (Misura  $\sigma$ -finita).

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura. La misura  $\mu$  è detta  **$\sigma$ -finita** se esiste un insieme al più numerabile di misurabili  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$  tali che

$$\forall i \in \mathbb{N}, \mu(A_i) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = X.$$

### 3.1.1 Metodo di Carathéodory

In questa sezione ci occuperemo di uno dei metodi classici di costruzione di spazi di misura data una certa funzione misura. Definiamo anzitutto lo strumento di “misura” per tutti i sottoinsiemi di  $X$ .

**Definizione 3.14** (Misura esterna).

Una mappa  $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  è detta **misura esterna** se è  $\sigma$ -subadditiva, cioè se:

$$m\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i m(E_i) \quad \forall E_i \in \mathcal{P}(X).$$

**Teorema 3.15** (Teorema di Carathéodory).

Dato un insieme  $X$  ed una misura esterna  $m$  abbiamo che l'insieme

$$\mathcal{E}_m = \{E \subseteq X \mid \forall S \subseteq X, m(S) = m(S \cap E) + m(S \setminus E)\}$$

gode delle seguenti proprietà:

1.  $\mathcal{E}_m$  è una  $\sigma$ -algebra,
2.  $m|_{\mathcal{E}_m}$  è una misura,
3.  $(X, \mathcal{E}_m, m|_{\mathcal{E}_m})$  è uno spazio di misura completo.

Gli elementi di  $\mathcal{E}_m$  sono detti **misurabili da  $m$** .

*Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

□

**Teorema 3.16** (Metodo di Carathéodory).

Se  $(X, \mathcal{E}, m)$  è uno spazio di misura allora

$$m^* : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow [0, +\infty] \\ E & \longmapsto \inf\{m(F) \mid F \supseteq E, F \in \mathcal{E}\} \end{array}$$

è una misura esterna e  $m^*|_{\mathcal{E}} = m$ .

In particolare  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_{m^*}$  e  $(X, \mathcal{E}_{m^*}, m^*|_{\mathcal{E}_{m^*}})$  è uno spazio di misura completo che estende  $(X, \mathcal{E}, m)$ .

Informalmente Carathéodory ci permette di completare gli spazi di misura.

*Osservazione 3.17* (Estensione Naive).

Se  $(X, \mathcal{E}, m)$  è uno spazio di misura allora

$$\bar{\mathcal{E}} = \{E \cup N' \mid E \in \mathcal{E}, \exists N \text{ trascurabile t.c. } N' \subseteq N\}$$

è una  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{E}$  e

$$\bar{m} : \begin{array}{ll} \bar{\mathcal{E}} & \longrightarrow [0, +\infty] \\ E \cup N' & \longmapsto m(E) \end{array}$$

è una misura completa che estende  $m$ .

In generale  $\bar{\mathcal{E}} \neq \mathcal{E}_{m^*}$ , ma ai fini del corso ignoreremo questo fatto.

### 3.1.2 Misura di Lebesgue

**Definizione 3.18** (Rettangoli e plurirettangoli).

Dati  $n$  intervalli della forma  $[a_i, b_i]$ , un insieme della forma

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$$

è detto **rettangolo**.

Se  $\{R_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è una famiglia numerabile di rettangoli tale che  $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$  per  $i \neq j$  allora un insieme della forma

$$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$$

è detto **plurirettangolo (numerabile)**.

*Osservazione 3.19.*

Tutti gli aperti sono plurirettangoli regolari, basta imporre sull'aperto una griglia cubica, inserire i cubi interamente contenuti nell'aperto nella famiglia  $\{R_i\}$ , raffinare la griglia e ripetere con ciò che manca per riempire l'aperto. Se scegliamo una successione tendente a zero per la lunghezza dei lati dei cubi nella griglia si ha che con una quantità numerabile di cubi avremo coperto l'aperto.

Proviamo allora a costruire una misura che sia consona alla nostra intuizione sui volumi. Definiamo prima una misura esterna. Questa ci restituirà una misura completa per il **Teorema di Carathéodory**.

**Proposizione 3.20** (Misura esterna di Lebesgue).

La mappa  $m^*$  definita sui rettangoli come

$$m^* \left( \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|,$$

sui plurirettangoli numerabili come

$$m^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(R_i)$$

e su ogni altro sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  come

$$m^*(E) = \inf \{ m^*(P) \mid P \supseteq E \text{ con } P \text{ plurirettangolo} \}$$

è  $\sigma$ -subadditiva e si chiama **misura esterna di Lebesgue**.

*Osservazione 3.21.*

L'estensione di  $m^*$  che abbiamo fatto all'ultimo passo è posta in modo da ricordare la forma della misura esterna nel **Metodo di Carathéodory**.

**Definizione 3.22** (Misura di Lebesgue).

Siano  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{m^*} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  la  $\sigma$ -algebra e  $\mathcal{L} = m^*|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)}$  la misura completa garantiti dal **Teorema di Carathéodory**.

La misura  $\mathcal{L}$  è detta **misura di Lebesgue** e gli elementi di  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  si chiamano insiemi **(Lebesgue-)misurabili**.

*Osservazione 3.23.*

La misura di Lebesgue è una misura di Borel, infatti per quanto detto gli aperti sono plurirettangoli e sono dunque misurabili.

*Osservazione 3.24* (Ci sono più Misurabili che Boreliani).  
 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  e  $\mathcal{L}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$  non è completa.

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| < |\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)|$ , basta dunque mostrare che  $|\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)|$ . A questo scopo è sufficiente osservare che esiste  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto (e quindi chiuso e quindi misurabile), trascurabile e più che numerabile, a quel punto ogni suo sottoinsieme sarà misurabile per completezza di  $\mathcal{L}$  e sappiamo che questo insieme avrà  $|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)|$  sottoinsiemi.

Per  $n = 1$  un valido  $C$  è l'insieme di Cantor. Per  $n$  più grande basta moltiplicare l'insieme di Cantor per  $\{0\}^{n-1}$ .  $\square$

**Proposizione 3.25** (Insieme di Vitali).

$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

*Dimostrazione.*

Mostriamo il caso per  $n = 1$ :

Definiamo la seguente relazione di equivalenza su  $\mathbb{R}$ :

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} \implies [x] = \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

Sia  $E \subseteq [0, 1)$  un insieme di rappresentanti per questa relazione, cioè per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $E \cap [x] = \{y(x)\}$  è un singolo.

Affermiamo che  $E$  non è misurabile. Definiamo

$$F = \bigcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (E + q)$$

e osserviamo che se  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$  con  $q_1 \neq q_2$  allora  $(E + q_1) \cap (E + q_2) = \emptyset$  per definizione di  $E$ , cioè  $F$  è dato da una unione disgiunta.

Dato che  $F \subseteq [-1, 2)$  si ha che  $m^*(F) \leq 3$  (misura esterna di Lebesgue), osserviamo inoltre che  $[0, 1) \subseteq F$ , infatti se  $y \in [0, 1)$  si ha che  $y \in [x]$  per qualche  $x \in E$  e quindi  $y \in E + (y - x)$  con  $y - x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ .

Se  $E$  fosse misurabile allora  $\mathcal{L}(E) = 0$  o  $\mathcal{L}(E) > 0$ , ma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E) = 0 &\implies \mathcal{L}(F) = \sum 0 = 0 \implies \mathcal{L}([0, 1)) = 0 \text{ } \neq \\ \mathcal{L}(E) > 0 &\implies \mathcal{L}(F) = \sum \mathcal{L}(E) = +\infty, \text{ ma } \mathcal{L}(F) \leq 3 \text{ } \neq \end{aligned}$$

Abbiamo dunque mostrato che  $E \notin \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ .

Se  $n > 1$  basta considerare estensioni semplici dell'insieme di Vitali, tipo  $E \times [0, 1]^{n-1}$ .  $\square$

**Proposizione 3.26** (La misura di Lebesgue è regolare).

La misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$  è regolare.

*Dimostrazione.*

Aperti) Sappiamo che

$$\mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(P) \mid P \supseteq E \text{ plurirettangolo numerabile}\}$$

Dato  $\varepsilon > 0$  e un plurirettangolo  $P = \bigcup R_i$  possiamo trasformare  $R_i$  in un rettangolo aperto  $R_{i,\varepsilon}$  leggermente più grande in modo che

$$\mathcal{L}(R_{i,\varepsilon}) \leq \mathcal{L}(R_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Se definiamo  $P_\varepsilon = \bigcup R_{i,\varepsilon}$  si ha allora che

$$\mathcal{L}(P_\varepsilon) \leq \mathcal{L}(P) + \varepsilon$$

e quindi

$$\mathcal{L}(E) = \inf\{\mathcal{L}(P_\varepsilon) \mid P \supseteq E, \varepsilon > 0\}$$

dove stavolta ogni termine dell'insieme è un aperto. Sappiamo però che gli aperti sono plurirettangoli numerabili quindi raggiungo tutti gli aperti e ho la tesi.

Compatti) Osservo che  $\{B_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  copre  $\mathbb{R}^n$ , dunque

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap B_n(0) \implies \mathcal{L}(E) = \lim \mathcal{L}(E \cap B_n(0)).$$

Possiamo dunque supporre  $E$  limitato (lavoriamo sulle intersezioni). Consideriamo  $\overline{E} \setminus E$ , il quale è misurabile perché differenza di un chiuso (boreliano) e un misurabile. Per il punto precedente esiste per ogni  $\varepsilon > 0$  un aperto  $A_\varepsilon$  tale che  $A_\varepsilon \supseteq \overline{E} \setminus E$  e  $\mathcal{L}(A_\varepsilon) \leq \mathcal{L}(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$ . Definiamo allora il seguente compatto:

$$K_\varepsilon = \overline{E} \setminus A_\varepsilon = \overline{E} \cap A_\varepsilon^c = E \cap A_\varepsilon^c = E \setminus A_\varepsilon \subseteq E.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(K_\varepsilon) &= \mathcal{L}(E) - \mathcal{L}(E \cap A_\varepsilon) = \mathcal{L}(E) - (\mathcal{L}(A_\varepsilon) - \mathcal{L}(A_\varepsilon \setminus E)) \geq \\ &\geq \mathcal{L}(E) - (\mathcal{L}(A_\varepsilon) - \mathcal{L}(\overline{E} \setminus E)) \geq \\ &\geq \mathcal{L}(E) - \varepsilon, \end{aligned}$$

quindi per  $\varepsilon \rightarrow 0$  abbiamo compatti contenuti in  $E$  che si avvicinano sempre di più a  $\mathcal{L}(E)$ , da cui la tesi.  $\square$

### Definizione costruttiva della misura di Lebesgue

**Definizione 3.27** (Plurirettangolo finito).

Stessa definizione di un plurirettangolo numerabile ma ammettiamo solo unioni finite.

Definiamo  $\mathcal{L}$  come prima sui rettangoli,

$$\begin{aligned} (\star) \quad P = \bigcup_{i=1}^N R_i &\implies \mathcal{L}(P) \doteq \sum_{i=1}^N \mathcal{L}(R_i) \\ (\star) \quad A \text{ aperto} &\implies \mathcal{L}(A) \doteq \sup\{\mathcal{L}(P) \mid P \subseteq A \text{ plurirettangolo finito}\} \\ (\star) \quad K \text{ compatto} &\implies \mathcal{L}(K) \doteq \inf\{\mathcal{L}(P) \mid P \supseteq K \text{ plurirettangolo finito}\} \end{aligned}$$

e per insiemi generici  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  definiamo la **misura esterna di Lebesgue** come

$$\mathcal{L}^*(E) \doteq \inf\{\mathcal{L}(A) \mid A \supseteq E \text{ aperto}\}$$

e la **misura interna di Lebesgue** come

$$\mathcal{L}_*(E) \doteq \sup\{\mathcal{L}(K) \mid K \subseteq E \text{ compatto}\}$$

*Osservazione 3.28.*

Per ogni  $E$  si ha che  $\mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E)$ .

**Definizione 3.29** (Misurabili).

Un insieme  $E$  è detto **misurabile** se  $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{L}_*(E)$  e in tal caso scriviamo  $\mathcal{L}(E) \doteq \mathcal{L}_*(E) = \mathcal{L}^*(E)$ . Come notazione poniamo

$$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \text{ misurabili}\}.$$

**Teorema 3.30.**

$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  è una  $\sigma$ -algebra che contiene i Boreliani e  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)}$  è una misura, che chiamiamo **misura di Lebesgue**.

**Teorema 3.31.**

$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  coincide con la  $\sigma$ -algebra data dal teorema di Carathéodory.

*Osservazione 3.32* (Misurabilità per Jordan).

Avremmo potuto definire

$$m_J^*(E) = \inf\{\mathcal{L}(P) \mid P \supseteq E \text{ plurirettangolo finito}\}$$

$$m_{J*}(E) = \sup\{\mathcal{L}(P) \mid P \subseteq E \text{ plurirettangolo finito}\}$$

e per ogni  $E$  si ha

$$m_J^*(E) \geq \mathcal{L}^*(E) \geq \mathcal{L}_*(E) \geq m_{J*}(E).$$

Gli insiemi  $E$  tali che  $m_J^*(E) = m_{J*}(E)$  vengono detti **misurabili secondo Jordan**.

Il problema è che i misurabili secondo Jordan non sono una  $\sigma$ -algebra e  $m_J^*$  non è una misura esterna quindi non avremmo modo semplice di definire una misura.

**Esempio 3.33.**

$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  è Lebesgue misurabile ma non Jordan misurabile.

*Dimostrazione.*

$E$  è numerabile, quindi è trascurabile per Lebesgue, ma  $m_{J*}(E) = 0$  e  $m_J^*(E) = \mathcal{L}([0, 1]) = 1$ .  $\square$

In realtà non è strano che anche con una definizione diversa abbiamo trovato nuovamente la misura di Lebesgue, infatti vedremo (3.45) che vale il seguente

**Teorema 3.34** (Unicità della Misura di Lebesgue).

Sia  $m$  una misura di Borel su  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$m(K) < +\infty \quad \forall K \text{ compatto}$$

$$m(E+z) = m(E) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

allora esiste  $c \geq 0$  tale che per ogni  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$m(E) = c\mathcal{L}(E).$$

In altri termini, la misura di Lebesgue è l'unica misura a meno di riscalamento che è invariante per traslazione ed è finita sui compatti.

## 3.2 Complementi a teoria della misura

**Notazione 3.35** (Misura di Lebesgue).

Per brevità poniamo

$$|E| = \mathcal{L}(E).$$

NON intendiamo dunque la cardinalità degli insiemi. Se non sarà chiaro dal contesto indicheremo la cardinalità di  $E$  con  $\#E$ .

### 3.2.1 Esempi patologici in Teoria della Misura

**Esempio 3.36.**

Se  $\Omega$  è un aperto limitato non è detto che  $|\partial\Omega| = 0$

*Dimostrazione.*

Sia  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon/2^n}(q_n)$  dove  $q_n$  è una successione surgettiva a valori in  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ . Si ha che  $x \in [0, 1] \setminus \Omega \implies x \in \partial\Omega$  infatti per la densità dei razionali nei reali ogni palla centrata in  $x$  contiene dei razionali e quindi interseca  $\bar{\Omega}$ , dunque  $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega = \bar{\Omega} \setminus \text{int}(\Omega) = \partial\Omega$ .

Osserviamo che  $1 = |[0, 1]| = |[0, 1] \cap \Omega| + |[0, 1] \setminus \Omega| \leq |\Omega| + |\partial\Omega|$ . Osserviamo ora che per subadditività

$$|\Omega| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2(\varepsilon 2^{-n}) = 2\varepsilon,$$

dunque  $|\partial\Omega| \geq 1 - 2\varepsilon$ , quindi per  $\varepsilon < 1/2$  abbiamo che  $|\partial\Omega| > 0$ .  $\square$

**Lemma 3.37** (Il grafico di una funzione continua è trascurabile).

Sia  $B \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$  una palla chiusa e consideriamo  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si ha che il grafico  $G = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in B\}$  è trascurabile.

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . La mappa  $\varphi$  è una funzione continua su un compatto e quindi per Heine-Cantor abbiamo che è uniformemente continua. Esiste allora  $\delta > 0$  tale che  $|x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ .

Osserviamo che possiamo ricoprire  $B$  con un numero finito  $m$  di  $(N-1)$ -cubi disgiunti  $Q_i$  di diametro minore di  $\delta$  (lato minore di  $\delta/\sqrt{N-1}$ ). Si ha quindi che

$$G = \bigcup_{i=1}^m \underbrace{\{(x, \varphi(x)) \mid x \in B \cap Q_i\}}_{\doteq G_i}.$$

Avendo scelto quadrati di diametro abbastanza piccolo abbiamo che  $\exists x_i \in Q_i$  tale che

$$G_i \subseteq (B \cap Q_i) \times (\varphi(x_i) - \varepsilon, \varphi(x_i) + \varepsilon) \implies |G_i| \leq |Q_i| 2\varepsilon.$$

Vediamo però che per  $\delta \rightarrow 0$  si ha che  $\sum_{i=1}^m |Q_i| = |B| + o(\delta)$ , da cui

$$|G| = \sum |G_i| \leq 2\varepsilon \sum_{i=1}^m |Q_i| = 2\varepsilon |B| + o(\delta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

$\square$

**Proposizione 3.38.**

Data  $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$  e posto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > 0\}$ , se  $\nabla f(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \partial\Omega$  e  $\Omega$  è limitato allora  $|\partial\Omega| = 0$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\forall x \in \partial\Omega$  si ha che  $f(x) = 0$  per la permanenza del segno lungo una direzione per la quale  $\nabla f(x)$  ha una componente non nulla. Allora  $\partial\Omega$  è contenuto in una curva di livello, dunque per il **Teorema delle funzioni implicite** per ogni  $x \in \partial\Omega$  esiste  $V_x$  intorno aperto di  $x$  tale che  $\partial\Omega \cap V_x$  è grafico di una funzione. Per ipotesi  $\Omega$  è limitato, dunque  $\partial\Omega$  è limitato. Essendo ogni bordo chiuso si ha che  $\partial\Omega$  è compatto per il **Teorema di Heine-Borel**, dunque dal ricoprimento

$$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{x \in \partial\Omega} V_x$$

estraiamo  $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_M}\}$  ricoprimento finito. Basta quindi che  $|\partial\Omega \cap V_{x_i}| = 0$  per la subadditività nelle unioni finite. Questo vale per il lemma considerando una palla che contiene la controimmagine della mappa della quale  $\partial\Omega \cap V_x$  è il grafico.  $\square$

**Proposizione 3.39** (Ogni insieme di misura positiva contiene un non misurabile).

Sia  $A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^N)$  un insieme Lebesgue-misurabile tale che  $|A| > 0$ . Allora esiste  $V \subseteq A$  non Lebesgue-misurabile.

*Dimostrazione.*

Riconduciamoci al caso di  $A$  limitato:

Sia  $Q_0 = [0, 1]^N \subseteq \mathbb{R}^N$ . Osserviamo che

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} Q_0 + \xi,$$

da cui

$$A = \bigcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} A \cap (Q_0 + \xi).$$

Per la subadditività della misura di Lebesgue

$$0 < |A| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} |A \cap (Q_0 + \xi)|,$$

dunque esiste  $\bar{\xi} \in \mathbb{Z}^N$  tale che  $|A \cap (Q_0 + \bar{\xi})| > 0$ . Se la tesi vale nel caso limitato allora applicandola a  $A \cap (Q_0 + \bar{\xi})$  avremo mostrato la tesi per  $A$ .

Supponiamo dunque  $A$  limitato, senza perdita di generalità  $A \subseteq Q_0$  (troviamo  $\bar{\xi}$  come prima e sfruttiamo il fatto che la misura di Lebesgue è invariante per traslazione).

L'idea ora è costruire una generalizzazione dell'insieme di Vitali: definiamo la seguente relazione di equivalenza su  $A$

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^N$$

e definiamo  $V$  come un insieme di rappresentanti in  $A$  per la relazione. Mostriamo che  $V$  non è misurabile:

Osserviamo che in quanto insieme di rappresentanti, usando il fatto che  $\text{diam}(Q_0) = \sqrt{N}$ , si ha che

$$A \subseteq \bigsqcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} (V + \xi),$$

dove l'unione è disgiunta perché se  $v_1, v_2 \in V$  e  $v_1 \neq v_2$  allora per costruzione  $v_1 - v_2 \notin \mathbb{Q}^N$ .

Supponiamo per assurdo che  $V$  sia misurabile, allora per  $\sigma$ -additività della misura di Lebesgue

$$0 < |A| \leq \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V + \xi| = \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V| \implies |V| \neq 0.$$

Da questo segue che

$$\left| \bigsqcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} (V + \xi) \right| = \sum_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} |V| = +\infty,$$

ma questo è assurdo perché  $\bigsqcup_{\substack{\xi \in \mathbb{Q}^N \\ |\xi| \leq \sqrt{N}}} (V + \xi)$  è contenuto in  $[-\sqrt{N}, 1 + \sqrt{N}]^N$ , il quale è

compatto e sappiamo che la misura di Lebesgue sui compatti è finita.  $\nexists$  □

**Notazione 3.40.**

Indichiamo l'**insieme delle differenze** di  $A$  e  $B$  come

$$A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

**Proposizione 3.41.**

Se  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  è misurabile e  $|A| > 0$  allora  $A - A$  è un intorno di 0.

*Dimostrazione.*

Dato che la misura di Lebesgue è regolare (3.26), sappiamo che  $A$  contiene un compatto di misura arbitrariamente vicina a  $|A|$  dal basso, in particolare contiene un compatto di misura non nulla. Possiamo quindi senza perdita di generalità supporre che  $A$  sia compatto dato che l'insieme delle differenze di un sottoinsieme di  $A$  è contenuto nell'insieme delle differenze di  $A$ .

Sfruttando nuovamente la regolarità della misura di Lebesgue (3.26), sia  $G$  un aperto tale che  $G \supseteq A$  e  $|G| < 2|A|$ . Dato che  $A$  è compatto, ha senso parlare di  $d(A, G^c) = \min_{x \in A} d(x, G^c)$  per il **Teorema di Weierstrass**. Dato che  $G^c$  è un chiuso disgiunto da  $A$  (il quale è anche chiuso in quanto compatto) si ha che

$$d(A, G^c) = \min_{x \in A} d(x, G^c) > 0,$$

infatti, se così non fosse, per  $x$  che realizza  $d(x, G^c) = 0$  si avrebbe  $x \in A \cap G^c$ , che è assurdo.  $\nexists$

Sia dunque  $0 < \varepsilon < d(A, G^c)$  e consideriamo  $v \in \mathbb{R}^N$  tale che  $|v| < \varepsilon$ . Se mostriamo che  $v \in A - A$  allora avremo che  $B_\varepsilon(0) \subseteq A - A$  che mostra la tesi.

Dato che  $A \subseteq G$ ,  $A + v \subseteq G$  (segue dal fatto che  $d(A, G^c) > \varepsilon$ ). Osserviamo che  $A \cap (A + v) \neq \emptyset$ , infatti se così non fosse si avrebbe che

$$A \sqcup (A + v) \subseteq G \implies 2|A| \leq |G| < 2|A|,$$

che è assurdo.  $\nexists$

Siano allora  $a_1, a_2 \in A$  tali che  $a_1 = a_2 + v$ , segue che  $v = a_1 - a_2$ , cioè  $v \in A - A$  come volevamo.  $\square$

### Esempio 3.42.

Esiste  $A \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $|A| = 0$  e  $A - A$  è intorno di 0.

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $A = C$  l'insieme di Cantor e verifichiamo che  $[-1, 1] \subseteq C - C$ :

Consideriamo  $C \times C \subseteq [0, 1]^2$ . Dato  $a \in [-1, 1]$  sia  $r = \{(x, y) \mid x - y = a\}$ . La tesi coincide con mostrare che  $r \cap C \times C \neq \emptyset$ .

Osserviamo che possiamo costruire  $C$  nel seguente modo ricorsivo:

1. Definiamo  $C_0 = [0, 1]$ .
2. Costruiamo  $C_{k+1}$  a partire da  $C_k$  eliminando per ogni segmento in  $C_k$  della forma  $[a, b]$  i punti di  $(\frac{b-a}{3}, 2\frac{b-a}{3})$  (per esempio  $[0, 1] \rightarrow [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ ).

Il limite per  $k \rightarrow \infty$  di  $C_k$  è  $C$  (ad ogni passo stiamo eliminando i numeri la cui espansione decimale in base 3 contiene un 2 alla  $k$ -esima cifra decimale). Da questo segue che possiamo costruire  $C \times C$  considerando  $C_k \times C_k$  e prendendo il limite. Geometricamente  $C_k \times C_k$  consiste di  $4^k$  quadrati e ad ogni passo rimuoviamo la "croce centrale" da ognuno di questi quadrati.

Osserviamo che  $r$  è la diagonale  $\{y = x\}$  traslata in basso di  $a$  unità. Da questa interpretazione geometrica è evidente che per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$C_k \times C_k \cap r \neq \emptyset,$$

quindi  $r \cap C \times C \neq \emptyset$  perché l'intersezione di compatti non vuoti inscatolati è non vuota (se così non fosse potremmo costruire una successione a valori nel compatto più grande il cui limite esce dal compatto, che è assurdo<sup>1</sup>).  $\square$

## 3.2.2 Misure regolari

**Proposizione 3.43** (Misura di Borel finita su compatto è regolare).

Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e sia  $\mu$  una misura di Borel tale che  $\mu(X) \in \mathbb{R}$ . Allora  $\mu$  è regolare.

*Dimostrazione.*

Definiamo l'insieme dei boreliani che rispettano la tesi:

$$S = \{A \in \mathcal{B} \mid \mu(A) = \sup\{\mu(G) \mid G \text{ cpt. e } G \subseteq A\} = \inf\{\mu(G) \mid G \text{ aperto e } G \supseteq A\}\}.$$

<sup>1</sup>Una dimostrazione più generale e soddisfacente di questo fatto è dominio del corso di Geometria 2

Se mostriamo che  $S$  è una  $\sigma$ -algebra e contiene gli aperti allora avremo mostrato che  $\mu$  è regolare sui Boreliani e questo mostra che  $\mu$  è regolare<sup>2</sup>.

$\sigma$ -algebra)

- Evidentemente  $\emptyset \in S$  e  $X \in S$ .
- Complementare) Sia  $B \in S$ . Dato che  $B$  è boreliano è  $\mu$ -misurabile, quindi ha senso

$$\mu(B^c) = \mu(X) - \mu(B).$$

Sappiamo che  $\mu$  è regolare su  $B$ , dunque

$$\begin{aligned} \mu(B^c) &= \mu(X) - \inf\{\mu(G) \mid G \text{ aperto}, G \supseteq B\} = \\ &= \mu(X) + \sup\{-\mu(G) \mid G \supseteq B \text{ aperto}\} = \\ &= \sup\{\mu(G^c) \mid G \supseteq B \text{ aperto}\} = \\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B^c \text{ compatto}\}. \end{aligned}$$

In modo analogo vediamo che

$$\mu(B^c) = \inf\{\mu(G) \mid G \supseteq B^c \text{ aperto}\}.$$

Mettendo tutto insieme  $B \in S \implies B^c \in S$ .

- Unione numerabile) Consideriamo una collezione numerabile  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq S$  e mostriamo che  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  appartiene a  $S$ .

Supponiamo senza perdita di generalità che gli  $A_i$  siano disgiunti, se non lo fossero basta definire

$$A'_i = A_i \setminus \bigcup_{j < i} A_j$$

e considerare la famiglia  $\{A'_i\}$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e mostriamo che possiamo trovare un aperto e un compatto che si scostano da  $\bigcup A_i$  al massimo di  $\varepsilon$  in misura:

- Compatto) Osserviamo che per la  $\sigma$ -additività

$$\mu\left(\bigcup A_i\right) = \sum \mu(A_i) \in \mathbb{R},$$

sia dunque  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\sum_{i > n} \mu(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Per ogni  $i$  consideriamo  $K_i \subseteq A_i$  tali che  $\mu(K_i) > \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2n}$  (che esistono per la regolarità di  $\mu$  sugli  $A_i$ ). Poniamo

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i.$$

Osserviamo che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

da cui

$$\mu(K) = \sum_{i=1}^n \mu(K_i) > \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) - \varepsilon$$

come voluto.

<sup>2</sup>o almeno, questo è quello che è stato supposto a lezione. Non mi risulta che si sia mostrata questa implicazione.

– Aperto) Per ogni  $i \in \mathbb{N}$  sia  $G_i \supseteq A_i$  aperto tale che  $\mu(G_i) < \mu(A_i) + 2^{-i}\varepsilon$ .  
Osserviamo che

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

e che

$$\mu(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(G_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon$$

come voluto.

Chiusi appartengono a S) Se  $K$  è chiuso (e quindi anche compatto dato che  $X$  è compatto), banalmente

$$\mu(K) = \sup\{\mu(G) \mid G \subseteq K, G \text{ compatto}\},$$

basta quindi mostrare la stima con gli aperti. Poniamo

$$G_n = \{x \in X \mid d(x, K) < \frac{1}{n}\}.$$

Dato che  $d(\cdot, K) : X \rightarrow [0, +\infty)$  è continua e  $G_n = (d(\cdot, K))^{-1}([0, \frac{1}{n}))$  si ha che  $G_n$  è aperto. Osserviamo inoltre che  $G_{n+1} \subseteq G_n$  e

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

segue che

$$\mu(K) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(G_n)$$

e da questo segue la regolarità dall'alto cercata.  $\square$

**Corollario 3.44.**

Se  $\mu$  è una misura di Borel su  $\mathbb{R}^N$  tale che per ogni  $K$  compatto,  $\mu(K)$  è finito allora  $\mu$  è regolare.

*Dimostrazione.*

Verifichiamo la definizione di regolarità su  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  insieme  $\mu$ -misurabile:

Se  $A$  è limitato allora è contenuto in un compatto e concludo per il risultato precedente.

Se  $A$  non è limitato lo scrivo come unione numerabile di limitati come

$$\bigsqcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} ([0, 1]^N + \xi) \cap A$$

e mi riconduco al caso precedente sfruttando la  $\sigma$ -addittività di  $\mu$ .  $\square$

**Teorema 3.45** (Unicità della misura di Lebesgue).

Sia  $\mu$  una misura di Borel su  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$\begin{aligned} \mu(K) < +\infty & \qquad \forall K \text{ compatto} \\ \mu(E+z) = \mu(E) & \qquad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

allora esiste  $c \geq 0$  tale che per ogni  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\mu(E) = c\mathcal{L}(E).$$

*Dimostrazione.*

Se  $\mu([0, 1]^N) = 0$  allora usando la  $\sigma$ -addittività di  $\mu$  e l'invarianza per traslazione si ha che  $\mu = 0$ , infatti

$$\mathbb{R}^N = \bigsqcup_{\xi \in \mathbb{Z}^N} [0, 1]^N + \xi \implies \mu(\mathbb{R}^N) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \mu([0, 1]^N + \xi) = \sum 0 = 0.$$

Segue che in questo caso basta porre  $c = 0$  e abbiamo la tesi.

Se invece  $\mu([0, 1]^N) = c \neq 0$  allora la tesi equivale a mostrare che  $\frac{1}{c}\mu = \mathcal{L}$ . Supponiamo allora che  $c = 1$  e mostriamo che  $\mu = \mathcal{L}$ , da questo seguirà la tesi.

Costruiamo dei “mattoni” compatti che ci permettano di approssimare gli aperti. Mostriamo che  $\mu$  e  $\mathcal{L}$  coincidono sugli aperti e poi sfruttiamo la regolarità di entrambe per mostrare che coincidono sui boreliani.

Se poniamo

$$\Xi = \{(\xi_1, \dots, \xi_N) \mid \xi_i \in \{0, 1/2\} \forall i \in \{1, \dots, N\}\}$$

allora

$$[0, 1]^N = \bigsqcup_{\xi \in \Xi} \xi + \left[0, \frac{1}{2}\right)^N \implies \mu([0, 1/2]^N) = \frac{1}{\#\Xi} = \frac{1}{2^N}.$$

Reiterando questo ragionamento troviamo

$$\mu([0, 2^{-m}]^N) = 2^{-mN} = \mathcal{L}([0, 2^{-m}]^N).$$

Osserviamo ora che se  $A$  è aperto allora  $A$  si scrive come unione numerabile di cubi della forma sopra (ragionamento identico a quello fatto per mostrare che gli aperti sono plurirettangoli numerabili). Dalla  $\sigma$ -additività segue che  $\mu$  e  $\mathcal{L}$  coincidono sugli aperti.

Sia ora  $E$  boreliano e osserviamo che per la regolarità di  $\mathcal{L}$  (3.26) e di  $\mu$  (3.44) si ha che

$$\mu(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \subseteq E, A \text{ aperto}\} = \inf\{\mathcal{L}(A) \mid A \subseteq E, A \text{ aperto}\} = \mathcal{L}(E).$$

□

*Osservazione 3.46* (Approfondimento NON DATO DURANTE IL CORSO).

È in realtà possibile mostrare che se  $E$  è Lebesgue-misurabile e  $E$  appartiene alla  $\sigma$ -algebra di  $\mu$  allora  $\mu(E) = \mathcal{L}(E)$ .

*Dimostrazione.*

Se  $E$  è misurabile sappiamo che le misure interne e esterne di Lebesgue coincidono su  $E$ . Dato che queste sono definite solo in termini di boreliani, abbiamo che

$$\mathcal{L}(E) = \inf\{\mu(G) \mid G \supseteq E \text{ aperto}\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E \text{ compatto}\}.$$

Se  $E$  è misurabile per  $\mu$  allora necessariamente  $\mu(E) = \mathcal{L}(E)$  per monotonia delle misure.

□

## 3.3 Integrazione in spazi di misura

### 3.3.1 Funzioni misurabili

Ci piacerebbe dare la seguente

**Definizione 3.47** (Funzione misurabile).

Dati  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{D}, \nu)$  spazi di misura, affermiamo che una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è **misurabile** se per ogni  $B \in \mathcal{D}$  misurabile si ha che  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  era misurabile in partenza.

Purtroppo si ha che

*Osservazione 3.48.*

Esiste  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua tale che esiste  $N \subseteq [0, 1]$  misurabile con  $f^{-1}(N)$  NON è misurabile.

*Dimostrazione.*

Costruiamo una funzione invertibile che manda un misurabile in un non misurabile.

Sia  $K(x)$  la scala di Cantor (continua, debolmente crescente e costante ovunque eccetto che sull'insieme di Cantor) e consideriamo  $g(x) = \frac{K(x)+x}{2}$  (la rendiamo strettamente crescente). Osserviamo che l'immagine dell'insieme di Cantor  $C$  tramite  $K$  è  $[0, 1]$ , dunque  $|g(C)| > 0$ .

Poiché  $|g(C)| > 0$ , per la proposizione (3.39) esiste  $R \subseteq g(C)$  non misurabile. Sia  $N = g^{-1}(R) \cap C$ . Per bigettività di  $g$  sappiamo che  $g(N) = R \cap g(C) = R$  non è misurabile, ma  $N$  è trascurabile perché sottoinsieme di trascurabile.

Osserviamo allora che, ponendo  $f(x) = g^{-1}(x)$  troviamo che  $f^{-1}(N) = g(N) = R$  non è misurabile.  $\square$

Diamo allora la seguente definizione specifica per quando consideriamo funzioni a immagine in  $\mathbb{R}^n$ :

**Definizione 3.49** (Lebesgue misurabile).

Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  è uno spazio di misura allora  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  è **Lebesgue misurabile** se per ogni  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  boreliano (NON  $B \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ) come per la definizione generale) si ha che  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , cioè è una funzione che rimanda Boreliani di  $\mathbb{R}^n$  in misurabili.

Abbiamo dovuto modificare la definizione per Lebesgue in modo da poter includere classi abbastanza ampie di funzioni nella nostra teoria, per esempio le funzioni continue.

**Definizione 3.50** (Funzione boreliana).

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  di Borel e consideriamo tutti gli spazi muniti della misura di Lebesgue. Si ha che  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  è **boreliana** se per ogni  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  si ha che  $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ .

*Osservazione 3.51.*

Se la misura su  $X$  è di Borel allora  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  boreliana è misurabile. In particolare le funzioni continue con dominio dotato di misura di Borel sono Lebesgue-misurabili (che cominceremo a chiamare solo "misurabili").

**Notazione 3.52** (Misurabili a valori in  $\mathbb{R}$ ).

Dato uno spazio di misura  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  poniamo

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{E}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabili}\}.$$

Se non si presentano ambiguità scriveremo  $\mathcal{M}(X)$  o anche solo  $\mathcal{M}$ .

**Notazione 3.53** (Per quasi ogni).

Se  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  è uno spazio di misura, con la notazione  $\tilde{\forall} x \in X$  (leggasi "per quasi ogni  $x$  in  $X$ ") intendiamo

$$\exists N \text{ t.c. } \mu(N) = 0 \text{ e } \forall x \in X \setminus N,$$

cioè "per ogni  $x$  in  $X$  a meno di un insieme trascurabile".

Un'ulteriore notazione standard per lo stesso concetto è "per q.o.  $x \in X$ ".

*Osservazione 3.54* (Caratterizzazione delle misurabili).

La seguente catena di equivalenze ci fornisce una seconda caratterizzazione per le funzioni misurabili a valore in  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{M}(X) \\ f^{-1}(A) &\text{ misurabile per ogni } A \subseteq \mathbb{R} \text{ boreliano} \\ f^{-1}(A) &\text{ misurabile per ogni } A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto} \\ f^{-1}((a, +\infty)) &\text{ misurabile per ogni } a \in \mathbb{R} \\ \{x \in X \mid f(x) > t\} &\doteq \{f > t\} \subseteq X \text{ è misurabile per ogni } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

L'equivalenza tra prendere  $A$  boreliano e  $A$  aperto deriva dal fatto che gli aperti generano i boreliani come  $\sigma$ -algebra e la controimmagine rispetta unione, intersezione e complementare, anche arbitrari. L'equivalenza dopo deriva dal fatto che gli aperti della forma  $(a, +\infty)$  sono una prebase per la topologia euclidea su  $\mathbb{R}$ .

**Proposizione 3.55** (Proprietà delle misurabili).

Le funzioni misurabili a valori in  $\mathbb{R}$  godono delle seguenti proprietà:

1.  $\mathcal{M}(X)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$
2. Se  $f, g \in \mathcal{M}$  allora  $f \cdot g \in \mathcal{M}$  e  $f/g \in \mathcal{M}$  se  $g(x) \neq 0 \forall x \in X$
3. Data una successione  $f_n \in \mathcal{M}$  abbiamo che

$$\sup f_n \in \mathcal{M}, \inf f_n \in \mathcal{M}, \limsup f_n \in \mathcal{M}, \liminf f_n \in \mathcal{M}.$$

In particolare se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per quasi ogni  $x \in X$  abbiamo che  $f \in \mathcal{M}$ .

*Dimostrazione.*

1)

$$\begin{aligned} \{f + g > t\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g > t - q\}) \\ \{\lambda f > t\} &= \begin{cases} \{f > t/\lambda\} & \text{se } \lambda > 0 \\ \{f < t/\lambda\} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e tutti gli insiemi dei membri di destra sono misurabili perché manipolazioni permesse di misurabili.

2) Osserviamo prima che  $f^2$  è misurabile, infatti

$$\{f^2 > t\} = \begin{cases} X & \text{se } t < 0 \\ \{f > \sqrt{t}\} \cup \{f < -\sqrt{t}\} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

Osserviamo ora che

$$f \cdot g = \frac{(f + g)^2 - (f - g)^2}{4},$$

quindi i prodotti sono misurabili. Per concludere dobbiamo mostrare che  $f$  misurabile implica  $1/f$  misurabile (se il suo luogo di zeri è trascurabile)

$$\{1/f > t\} = \{f < 1/t\}.$$

3) Sappiamo che  $\liminf$  e  $\limsup$  si possono definire in termini di  $\sup$  e  $\inf$ , concentriamoci allora solo su questi:

$$\{\sup f_n > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > t\}.$$

Concludiamo osservando che  $\inf f_n = -\sup(-f_n)$ . □

*Osservazione 3.56.*

L'ultima proprietà è una innovazione, infatti ora basta una condizione di convergenza puntuale per avere un limite "integrabile" mentre per Riemann era necessaria una convergenza uniforme.

### 3.3.2 Integrale di Lebesgue

Ricordiamo la

**Definizione 3.57** (Funzione caratteristica).

Dato un insieme  $X$  e un suo sottoinsieme  $E$  la funzione **caratteristica** (o **indicatrice**) di  $E$  è definita come

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Definizione 3.58** (Funzione semplice).

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura. Affermiamo che  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  è **semplice** se esistono  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$  con  $E_i \cap E_j = \emptyset$  per  $i \neq j$  e  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tali che

$$s = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}.$$

Intuitivamente le funzioni semplici sono “a scalini” e costanti su insiemi misurabili.

Il motivo per cui abbiamo introdotto le funzioni semplici è perché ci permettono di approssimare le funzioni misurabili e per questo saranno fondamentali per la definizione di integrale.

**Proposizione 3.59** (Decomposizione Misurabili in semplici).

Data  $f \in \mathcal{M}(X)$ , se  $f \geq 0$  allora esiste una successione  $s_n$  di funzioni semplici con  $s_{n+1} \geq s_n \geq 0$  tale che

$$\lim s_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

*Dimostrazione.*

Per  $1 \leq i \leq n2^n$  poniamo

$$E_{n,i} = \left\{ \frac{i-1}{2^n} \leq f < \frac{i}{2^n} \right\}$$

e

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{\{f \geq n\}}.$$

Intuitivamente abbiamo diviso  $[0, n]$  in  $n2^n$  pezzi e individuato gli insiemi in  $X$  dove la funzione ha valore in questi pezzi. Abbiamo quindi definito  $s_n$  come la funzione che nell’ $i$ -esimo pezzo assume il valore costante più basso che  $f$  assume nello stesso pezzo, mentre nell’insieme dove  $f$  supera  $n$  abbiamo definito  $s_n$  costante (come se avessimo “tagliato” la parte di grafico oltre  $X \times [0, n]$ ).

Chiaramente per  $n \rightarrow \infty$  si ha  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  per ogni  $x$  dato che prima o poi  $f(x)$  sarà minore di  $n$  e oltre quel punto la differenza tra  $f(x)$  e  $s_n(x)$  è minore di  $1/2^n$ .  $\square$

*Osservazione 3.60* (La convergenza delle semplici è uniforme).

Se  $f$  è limitata allora  $s_n \rightarrow f$  uniformemente, infatti

$$0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{2^n} + \max\{0, \sup_X f - n\}}_{\text{non dipende da } x} \rightarrow 0.$$

*Osservazione 3.61.*

Se  $f$  non è non negativa osserviamo che  $f = f^+ - f^-$  con  $f^+$  e  $f^-$  positive, applicando dunque quanto detto a  $f^+$  e  $f^-$  troviamo  $s_n$  semplici con  $s_n(x) \rightarrow f(x)$  per ogni  $x \in X$ .

Siamo finalmente pronti per dare la seguente

**Definizione 3.62** (Integrale di Lebesgue).

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f \in \mathcal{M}(X)$ .

- Se  $f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$  è semplice e non negativa poniamo

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^N c_i \mu(E_i).$$

- Se  $f$  è non negativa poniamo

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu \mid 0 \leq s \leq f, s \text{ semplice} \right\}$$

- Se  $f = f^+ - f^-$  con  $f^+$  e  $f^-$  non negative poniamo

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu,$$

ammesso che non si presenti il simbolo  $(+\infty) - (+\infty)$  al membro di destra. Se questo dovesse essere il caso l'integrale di  $f$  non è definito.

**Definizione 3.63** (Integrabilità).

Una funzione  $f \in \mathcal{M}$  è detta **integrabile** se

$$\int f^+, \int f^- \in \mathbb{R}.$$

**Proposizione 3.64** (Proprietà delle integrabili).

Siano  $f, g \in \mathcal{M}$  tali che l'integrale è ben definito. Si ha che

1. l'integrale è lineare, cioè

$$\int f + g = \int f + \int g, \quad \int cf = c \int f \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

2. l'integrale è monotono, cioè se  $f \leq g$  per ogni  $x \in X$  allora  $\int f \leq \int g$

3. se esistono  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a \leq f \leq b$  per ogni  $x$  allora

$$a\mu(X) \leq \int f \leq b\mu(X)$$

- 4.

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

5. se  $A \in \mathcal{E}$  è misurabile allora è ben definito

$$\int_A f = \int_X \chi_A f$$

6. se  $N \in \mathcal{E}$  è trascurabile allora

$$\int_N f = 0$$

*Osservazione 3.65.*

$f$  è integrabile se e solo se  $|f|$  è integrabile.

**Definizione 3.66** (Funzioni integrabili).

Definiamo lo spazio delle funzioni integrabili con dominio in  $X$  come

$$\mathcal{L}^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabili}\}.$$

In realtà vedremo che uno spazio che meglio cattura l'essenza di funzione integrabile è

$$L^1(X) = \mathcal{L}^1(X) / \sim \quad \text{dove } f \sim g \iff \mu(\{f \neq g\}) = 0$$

cioè identifichiamo funzioni che differiscono su un insieme trascurabile.

*Osservazione 3.67.*

$\mathcal{L}^1(X)$  è uno spazio vettoriale per quanto detto.

Concludiamo la sezione introducendo una proprietà abbastanza utile:

**Proposizione 3.68** (Integrali nulli).

Sia  $f \in \mathcal{M}(X)$  non negativa e supponiamo che  $\int_X f d\mu = 0$ , allora

$$\mu(\{f > 0\}) = 0.$$

*Dimostrazione.*

Per le proprietà delle funzioni misurabili  $\{f > a\}$  è un insieme misurabile per ogni  $a \in \mathbb{R}$  (3.55). Supponiamo per assurdo che  $\mu(\{f > 0\}) > 0$ .

Consideriamo la successione  $E_n = \{f > \frac{1}{n}\}$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$ . Osserviamo che  $E_n \subseteq E_{n+1}$  e che  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{f > 0\}$ . Segue dunque per la monotonia delle misure (3.7) che

$$\lim_n \mu(E_n) = \mu(\{f > 0\}) > 0,$$

dunque esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $\mu(E_n) > 0$ . La contraddizione segue della seguente catena di disuguaglianze:

$$0 < \frac{1}{n} \mu(E_n) = \int_{\{f > \frac{1}{n}\}} \frac{1}{n} d\mu \leq \int_{\{f > \frac{1}{n}\}} f d\mu \leq \int_{\{f > 0\}} f d\mu = 0.$$

□

*Osservazione 3.69.*

Combinando la proposizione sopra con il punto 6 di (3.64) troviamo quanto segue:

Se  $f \geq 0$  è misurabile allora

$$\mu(\{f > 0\}) = 0 \iff \int_X f d\mu = 0.$$

### 3.3.3 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

**Proposizione 3.70** (L'integrale definisce una misura).

Sia  $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{E}, \mu)$  con  $f \geq 0$ . Allora

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

è una misura su  $X$  con  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{E}$ .

*Dimostrazione.*

Dobbiamo verificare che  $\nu$  è  $\sigma$ -additiva, cioè che per  $E_n \in \mathcal{E}$  disgiunti,  $\nu(\bigcup E_i) = \sum \nu(E_i)$ .

Osserviamo che se  $f$  è una funzione caratteristica, cioè  $f = \chi_A$  con  $A \in \mathcal{E}$ , allora

$$\nu(E) = \mu(E \cap A),$$

da cui

$$\nu(\bigcup E_i) = \mu(\bigcup E_i \cap A) \stackrel{\mu \text{ misura}}{=} \sum \mu(E_i \cap A) = \sum \nu(E_i).$$

Per linearità dell'integrale e delle somme abbiamo che la tesi vale se  $f$  è semplice.

Osserviamo ora che se  $0 \leq s \leq f$  con  $s$  semplice allora

$$\int_E s = \sum_i \int_{E_i} s \leq \sum_i \int_{E_i} f = \sum_i \nu(E_i).$$

Dato che la relazione vale per ogni  $0 \leq s \leq f$  semplice, e dato che per un opportuna scelta di semplici posso convergere a  $f$  quasi ovunque, si deve avere che

$$\nu(E) = \int_E f = \sup_s \int_E s \leq \sum_i \nu(E_i).$$

Mostriamo ora l'altra disuguaglianza. Mostriamolo prima per una bipartizione qualsiasi: da questa discenderà il caso per una unione finita e da quello il caso generale. Siano allora  $A, B \in \mathcal{E}$  due insiemi disgiunti e fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Sappiamo che possiamo trovare  $s_A$  e  $s_B$  semplici tali che

$$\int_A s_A \geq \int_A f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_B s_B \geq \int_B f - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f \geq s_A|_A + s_B|_B = s,$$

da cui

$$\nu(A \cup B) = \int_{A \cup B} f \stackrel{f \geq s}{\geq} \int_{A \cup B} \underbrace{s_A|_A + s_B|_B}_{\text{semplice}} \stackrel{\text{caso semplici}}{=} \nu(A) + \nu(B) - \varepsilon.$$

Passando al limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  troviamo  $\nu(A \cup B) \geq \nu(A) + \nu(B)$  come cercato.

Osserviamo ora che

$$\nu(E) = \int_E f \stackrel{f \geq 0}{\geq} \int_{\bigcup_{i=1}^N E_i} f = \nu\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) \stackrel{\text{reitera quanto sopra}}{\geq} \sum_{i=1}^N \nu(E_i).$$

Dato che questa disuguaglianza vale per ogni  $N$  abbiamo passando al sup che

$$\nu(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i).$$

□

**Corollario 3.71** (Convergenza dell'integrale per successione monotona di domini).

Dati  $E_n \in \mathcal{E}$  con  $E_n \subseteq E_{n+1}$  e data  $f \in \mathcal{M}$  non negativa si ha che

$$\int_{\bigcup E_n} f = \lim \int_{E_n} f.$$

Similmente per  $E_n \supseteq E_{n+1}$  con  $\int_{E_0} f \in \mathbb{R}$  troviamo

$$\int_{\bigcap E_n} f = \lim \int_{E_n} f$$

*Dimostrazione.*

Definita la misura  $\nu$  come nella proposizione (3.70) basta applicare (3.7) □

**Teorema 3.72** (Convergenza monotona / Beppo-Levi).

Sia  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}$  una successione di funzioni misurabili tale che  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  e sia  $f(x) = \lim f_n(x) = \sup f_n(x)$ . Allora

$$\int_X f = \lim \int_X f_n = \sup \int_X f_n.$$

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che una  $f$  così definita è misurabile e non negativa, quindi il suo integrale è ben definito. Dal fatto che  $f \geq f_n$  segue immediatamente che  $\int f \geq \int f_n$ , dobbiamo quindi mostrare che  $\int f \leq \lim \int f_n$ .

Sia  $0 \leq s \leq f$  una funzione semplice e sia  $\varepsilon > 0$ . Poniamo

$$E_n = \{f_n \geq (1 - \varepsilon)s\} \subseteq E_{n+1}.$$

Osserviamo che  $X = \bigcup E_n$ , infatti per ogni  $x \in X$  si ha che  $s(x) \leq f(x) = \lim f_n(x)$ , quindi o  $f(x) = 0$ , da cui  $f_n(x) = 0$  e  $x \in E_n$  per ogni  $n$  oppure

$$(1 - \varepsilon)s(x) < f(x) \implies (1 - \varepsilon)s(x) < f_n(x) \text{ definitiv. } \implies x \in E_n \text{ definitiv. .}$$

Osserviamo quindi che definitivamente

$$\int_X f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} (1 - \varepsilon)s = (1 - \varepsilon) \int_{E_n} s,$$

dunque

$$\lim \int_X f_n \geq (1 - \varepsilon) \lim \int_{E_n} s \stackrel{\lim E_n = X}{=} (1 - \varepsilon) \int_X s.$$

Prendendo il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  troviamo

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X s$$

e prendendo il sup nelle semplici troviamo

$$\lim \int_X f_n \geq \int_X f$$

come voluto. □

**Corollario 3.73** (Scambiare serie e integrali).

Se  $f_n \in \mathcal{M}$  con  $f_n \geq 0$  allora

$$\int_X \sum_n f_n = \sum_n \int_X f_n.$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\int_X \sum_n f_n = \int_X \sup_N \sum_n^N f_n \stackrel{\text{Beppo Levi}}{=} \sup_N \int_X \sum_n^N f_n = \sup_N \sum_n^N \int_X f_n = \sum_n \int_X f_n.$$

□

**Lemma 3.74** (Lemma di Fatou).

Sia  $f_n \in \mathcal{M}$  con  $f_n \geq 0$  e poniamo  $f(x) = \liminf f_n(x)$ . Allora vale che

$$\int_X f = \int_X \liminf f_n \leq \liminf \int_X f_n.$$

*Dimostrazione.*

Sia  $g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x) \leq g_{n+1}(x)$ , da cui  $g_n(x) \leq f_n(x)$ . Osserviamo che  $f(x) = \lim g_n(x) = \sup g_n(x)$ . Per il teorema di **Convergenza monotona / Beppo-Levi**

$$\int f = \lim \int g_n = \liminf \int g_n \leq \liminf \int f_n.$$

□

*Osservazione 3.75.*

Non è detto che  $\int \lim f_n = \lim \int f_n$ , per esempio si considerino le successioni di funzioni

$$\chi_{[n, n+1]}, \quad n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}, \quad \frac{1}{\pi} \frac{n}{n^2 + x^2}.$$

In tutti questi casi si ha che per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim f_n(x) = 0$  ma  $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$  per ogni  $n$ , quindi  $\lim \int f_n = 1$ .

**Teorema 3.76** (Convergenza dominata / Lebesgue).

Siano  $f_n \in \mathcal{M}$  e sia  $g \in \mathcal{M}$  tale che  $g \geq 0$  e  $\int_X g \in \mathbb{R}$ . Supponiamo inoltre che

1.  $|f_n| \leq g$  per ogni  $n$  e
2. quasi ovunque esiste il limite  $f(x) = \lim f_n(x)$ .

Allora

$$\lim \int |f_n - f| d\mu = 0$$

*Dimostrazione.*

Dato che  $|f_n| \leq g$  per ogni  $n$  si ha che  $|f| \leq g$ , da cui  $|f_n - f| \leq 2g$  per disuguaglianza triangolare. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_X 2g &= \int_X \lim(2g - |f_n - f|) = \int_X \liminf(2g - |f_n - f|) \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \\ &\leq \liminf \int_X 2g - |f_n - f| = \\ &= \int_X 2g - \limsup \int_X |f_n - f|, \end{aligned}$$

quindi<sup>3</sup>

$$\limsup \int_X |f_n - f| \leq 0.$$

Per concludere osserviamo che poiché  $|f_n - f| \geq 0$  si ha  $\int_X |f_n - f| \geq 0$ , da cui

$$0 \leq \liminf \int_X |f_n - f| \stackrel{\text{per definizione}}{\leq} \limsup \int_X |f_n - f| \leq 0,$$

dunque il limite in questione esiste e vale 0. □

*Osservazione 3.77* (Se vale convergenza dominata possiamo scambiare limite e integrale). Se siamo nelle ipotesi di **Convergenza dominata / Lebesgue**

$$0 \leq \left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int f_n - f \right| \leq \int |f_n - f| \rightarrow 0,$$

quindi in questo caso

$$\int f = \lim \int f_n.$$

La convergenza dominata ci permette di scambiare limiti con integrali.

**Proposizione 3.78** (Integrali e convergenza uniforme).

Siano  $f_n \in \mathcal{M}$ . Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente e  $\mu(X) \in \mathbb{R}$  allora

$$\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

*Dimostrazione.*

Per definizione di convergenza uniforme, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq N$  si ha che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Sappiamo dunque che definitivamente

$$\left| \int_X f d\mu - \int_X f_n d\mu \right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \leq \int_X \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu(X) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

□

*Osservazione 3.79.*

Quando doteremo  $L^1$  della struttura di Spazio di Banach definiremo la norma come

$$\|f\| = \int |f|.$$

Abbiamo quindi dato un criterio per trovare successioni convergenti in  $L^1$ .

<sup>3</sup>stiamo usando il fatto che  $\int_X g$  è un numero reale!

### 3.3.4 Misure prodotto

**Definizione 3.80** ( $\sigma$ -algebra prodotto).

Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{D}$   $\sigma$ -algre su  $X$  e  $Y$  rispettivamente. Definiamo la  **$\sigma$ -algebra prodotto**  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$  come la  $\sigma$ -algebra su  $X \times Y$  generata dai “rettangoli”  $E \times F$  con  $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{D}$ , cioè la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene i rettangoli.

**Definizione 3.81** (Misura prodotto).

Se  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{D}, \nu)$  sono spazi di misura, affermiamo che  $\mu \times \nu$  è una **misura prodotto** di  $\mu$  e  $\nu$  se è definita su  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$  e per ogni  $E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{D}$  abbiamo

$$\mu \times \nu(E \times F) = \mu(E)\nu(F).$$

**Proposizione 3.82.**

*Una misura prodotto esiste.*

*Dimostrazione.*

Abbozziamo un procedimento tramite il quale possiamo definirla.

Definiamo una sorta di plurirettangolo

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i \quad \text{con } E_i \in \mathcal{A}, F_i \in \mathcal{D} \text{ e } i \neq j \implies (E_i \times F_i) \cap (E_j \times F_j) = \emptyset$$

e poniamo

$$(\mu \times \nu(G)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\nu(F_i).$$

Poniamo ora per ogni  $E \subseteq X \times Y$

$$(\mu \times \nu)^*(E) = \inf \{ \mu \times \nu(G) \mid E \subseteq G \text{ con } G \text{ come sopra} \}.$$

È possibile mostrare che  $(\mu \times \nu)^*$  è una misura esterna, quindi con il **Teorema di Carathéodory** troviamo una  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{M}$  dei misurabili tale che  $(\mu \times \nu)^*|_{\mathfrak{M}}$  è una misura completa.

Per completare la dimostrazione basterà osservare che

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{M} \text{ e } (\mu \times \nu)^*(E \times F) = \mu(E)\nu(F).$$

□

*Osservazione 3.83.*

La mappa

$$(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}}$$

è la misura prodotto massimale, inoltre è anche l'unica misura prodotto se  $\mu$  e  $\nu$  sono  $\sigma$ -finite.

**Esempio 3.84** (Caso con misura prodotto non unica).

Se  $X = ([0, 1], \mathfrak{M}([0, 1]), \mathcal{L})$  e  $Y = ([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), \nu)$  dove per  $F \subseteq Y$  poniamo  $\nu(F) = \#F$ .

Osserviamo che  $X \times Y = [0, 1]^2$  e  $\mathfrak{M}([0, 1]) \otimes \mathcal{P}([0, 1])$ . Vediamo che non abbiamo una unica misura prodotto dato che per quasi ogni elemento di  $\mathfrak{M}([0, 1]) \otimes \mathcal{P}([0, 1])$  vale  $+\infty$ .

*Osservazione 3.85.*

In generale  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \subsetneq \mathfrak{M}$  e  $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}}$  non è completa.

**Esempio 3.86** (Prodotto di misure di Lebesgue).

Consideriamo il prodotto di misure di Lebesgue. Osserviamo che

$$\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathfrak{M}(\mathbb{R}^m) \subsetneq \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{n+m}),$$

per esempio se  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  è non misurabile limitato (senza perdita di generalità contenuto in  $[-M, M]^n$ ) e  $F \subseteq \mathbb{R}^m$  è trascurabile allora  $V \times F \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{n+m})$  (perché contenuto in trascurabile, cioè  $[-M, M]^n \times F$ ) ma  $V \times F \notin \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathfrak{M}(\mathbb{R}^m)$  per un risultato che mostreremo tra poco sulle sezioni (se  $V \times F$  fosse nel prodotto allora le sue sezioni fissando un elemento di  $F$ , le quali sono  $V$  stesso, dovrebbero appartenere a  $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ , che contraddice le ipotesi).

### 3.3.5 Sezioni e Fubini-Tonelli

**Definizione 3.87** (Sezioni).

Sia  $E \subseteq X \times Y$ . Definiamo le **sezioni** come insiemi di questo tipo:

$$\begin{aligned} \text{per } x \in X & & E_x &= \{y \mid (x, y) \in E\} = \pi_Y(E \cap (\{x\} \times Y)) \subseteq Y \\ \text{per } y \in Y & & E^y &= \{x \mid (x, y) \in E\} = \pi_X(E \cap (X \times \{y\})) \subseteq X \end{aligned}$$

Se  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  definiamo le **sezioni** della funzione come

$$f_x : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x, y) \end{array}, \quad f^y : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, y) \end{array}.$$

**Proposizione 3.88** (Sezioni di misurabile in  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$  sono misurabili).

Se  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$  allora  $E_x \in \mathcal{D}$  per ogni  $x \in X$  e  $E^y \in \mathcal{A}$  per ogni  $y \in Y$ .

*Dimostrazione.*

Sia

$$\mathcal{E} = \{E \subseteq X \times Y \mid \text{le sezioni si comportano come nella tesi}\}$$

Osserviamo che se  $E \in \mathcal{A}$  e  $F \in \mathcal{D}$  allora  $E \times F \in \mathcal{E}$ . È possibile mostrare che  $\mathcal{E}$  è una  $\sigma$ -algebra, quindi mettendo insieme questi fatti

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}.$$

□

**Proposizione 3.89** (Sezioni di funzioni misurabili su  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$  sono misurabili).

Sia  $f \in \mathcal{M}(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}, \mu \times \nu)$ , allora

$$\begin{aligned} \forall x \in X & & f_x &\in \mathcal{M}(Y, \mathcal{D}, \nu) \\ \forall y \in Y & & f^y &\in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}, \mu) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che per ogni  $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  e  $\forall x \in X$  abbiamo

$$f_x^{-1}(I) = f^{-1}(I)_x \in \mathcal{D},$$

dove l'ultima appartenenza deriva dalla proposizione precedente. Per l'altra funzione sezione abbiamo un ragionamento analogo. □

*Osservazione 3.90.*

Se  $(X \times Y, \mathfrak{M}, \mu \times \nu)$  è un completamento di  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}, \mu \times \nu)$  allora le proposizioni precedenti valgono ancora se sostituiamo i “ $\forall$ ” con dei “ $\tilde{\forall}$ ”, cioè per quasi ogni  $x \in X$  le sezioni sono misurabili in  $\mathcal{D}$  e così via.

*Osservazione 3.91.*

Non vale il viceversa, cioè può esistere  $E \subseteq X \times Y$  non misurabile con sezioni misurabili.

**Esempio 3.92** (Insieme non misurabile con sezioni misurabili).  
OMESSO<sup>4</sup>.

Vorremmo capire come scrivere  $\mu \times \nu(E)$  in termini di  $\mu(E^y)$  e  $\nu(E_x)$ .

**Proposizione 3.93** (Fubini-Tonelli debole).

Siano  $\mu, \nu$  misura  $\sigma$ -finite e sia  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$ , allora

1. la funzione  $x \mapsto \nu(E_x)$  è misurabile in  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,
2. la funzione  $y \mapsto \mu(E^y)$  è misurabile in  $(Y, \mathcal{D}, \nu)$  e
3.  $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu = \int_Y \mu(E^y) d\nu$ .

*Dimostrazione.*

Basta verificare che gli insiemi che verificano le tre proprietà (chiamo l'insieme di questi insiemi  $\mathcal{E}$ ) sono una  $\sigma$ -algebra che contiene i rettangoli. Diamo un abbozzo della dimostrazione. I punti principali da mostrare sono:

- $\mathcal{E}$  contiene i rettangoli (le sezioni sono costanti e concludo per definizione di misura prodotto)
- per linearità le unioni e intersezioni finite di rettangoli appartengono ad  $\mathcal{E}$
- per **Convergenza monotona / Beppo-Levi**,  $\mathcal{E}$  è stabile per unioni numerabili crescenti
- usando la  $\sigma$ -finitzza mostriamo che  $\mathcal{E}$  è stabile per complementare, e per il punto sopra è dunque stabile per intersezioni numerabili decrescenti
- mostriamo in astratto che un insieme che rispetta le tre proprietà precedenti (detto **classe monotona**) che contiene  $\emptyset$  e  $X \times Y$  è una  $\sigma$ -algebra.

□

**Esempio 3.94.**

Se non abbiamo la  $\sigma$ -finitzza allora la proposizione non vale. Consideriamo  $X = Y = [0, 1]$  con  $\mu = \mathcal{L}$  e  $\nu(E) = \#E$  (quest'ultima non è  $\sigma$ -finita). Consideriamo ora  $D = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$  la diagonale di  $X \times Y$ . Osserviamo che

$$\int_0^1 \nu(D_x) d\mathcal{L} = \int_0^1 1 d\mathcal{L} = 1 > 0 = \int_0^1 0 d\nu = \int_0^1 \mathcal{L}(D^y) d\nu.$$

Osserviamo inoltre che

$$(\mathcal{L} \times \nu)^*(D) = +\infty,$$

infatti quasi tutti i rettangoli hanno misura infinita, l'unico modo per avere misura finita sarebbe costruire  $D$  come unione di singoli punti, ma questo richiederebbe fare una unione più che numerabile.

**Teorema 3.95** (Teorema di Fubini-Tonelli).

Siano  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(Y, \mathcal{D}, \nu)$  spazi di misura  $\sigma$ -finiti e consideriamo (l'unico) spazio prodotto  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}, \mu \times \nu)$ . Valgono i seguenti risultati:

Tonelli) Se  $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$  è tale che  $f \geq 0$  allora per ogni  $x \in X$ ,  $y \in Y$  abbiamo che le seguenti sono misurabili

$$f_x, \quad f^y, \quad x \mapsto \int_Y f_x, \quad y \mapsto \int_X f^y,$$

<sup>4</sup>È stato dato un esempio che sfrutta l'ipotesi del continuo.

inoltre vale

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_Y \int_X f^y d\mu d\nu.$$

Fubini) Se  $f \in L^1(X \times Y)$  allora per quasi ogni  $x \in X$ ,  $y \in Y$  abbiamo che le seguenti sono misurabili

$$f_x, \quad f^y, \quad x \mapsto \int_Y f_x, \quad y \mapsto \int_X f^y,$$

inoltre vale

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x d\nu d\mu = \int_Y \int_X f^y d\mu d\nu.$$

*Dimostrazione.*

Tonelli) Verifichiamo la tesi con ipotesi sempre meno restrittive su  $f$ :

Se  $f = \chi_E$  allora osserviamo che  $f_x = \chi_{E_x}$  e  $f^y = \chi_{E^y}$ , dunque la tesi è data dalla proposizione precedente.

Se  $f$  è semplice, per linearità dell'integrale ci riconduciamo al caso precedente.

Se  $f \in \mathcal{M}$  sappiamo che esiste una successione  $s_n$  di funzioni semplici tali che  $0 \leq s_n \leq f$ ,  $s_n \leq s_{n+1}$  e  $\sup s_n = f$ . Osserviamo che

$$\sup(s_n)_x = f_x, \quad \sup(s_n)^y = f^y,$$

dunque applicando **Convergenza monotona / Beppo-Levi** abbiamo la tesi dal caso precedente.

Fubini) Scriviamo  $f = f^+ - f^-$ . Osserviamo che  $f_x = f_x^+ - f_x^-$  e similmente per  $f^y$ , dunque per linearità dell'integrale e il punto precedente abbiamo la tesi.  $\square$

*Osservazione 3.96 (Criterio di integrabilità).*

Per controllare se  $f \in \mathcal{M}(X \times Y)$  appartiene a  $L^1(X \times Y)$  dobbiamo verificare che  $\int_{X \times Y} |f| \in \mathbb{R}$ . Per il **Teorema di Fubini-Tonelli** basta verificare che uno tra i seguenti sia finito

$$\int_X \int_Y |f|_x d\nu d\mu, \quad \int_Y \int_X |f|^y d\mu d\nu.$$

*Osservazione 3.97.*

Il teorema vale anche sostituendo  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}$  con  $\mathfrak{M}$  tale che  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{M}$  e  $(X \times Y, \mathfrak{M}, \mu \times \nu)$  spazio prodotto completo.

*Osservazione 3.98.*

Quando consideriamo integrali su  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n), \mathcal{L})$  possiamo reiterare  $n$  volte il **Teorema di Fubini-Tonelli** per scomporre l'integrale sulle  $n$  variabili

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n.$$

**Proposizione 3.99** (Interpretazione geometrica).

Una funzione è misurabile se e solo se il suo sottografico lo è, cioè

$$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}) \iff S_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y < f(x)\} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Inoltre, se  $f \geq 0$ , si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)),$$

cioè l'integrale coincide con la misura del volume compreso tra il sottografico e lo spazio dominio.

*Dimostrazione.*

Ricordiamo (3.54) che  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  se e solo se per ogni  $t \in \mathbb{R}$

$$S_f \cap \{y = t\} = {}^5\{f > t\} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

$\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $S_f$  sia misurabile. Osservo allora che  $\{f > t\}$  misurabile per *quasi ogni*  $t$  in quanto sezione di  $S_f$  (3.88). Osserviamo però che prendendo una successione monotona  $t_n > t_{n+1}$  tale che  $t_n \rightarrow t$  di punti tali che  $\{f > t_n\}$  è misurabile si ha che

$$\{f > t\} = \bigcup_n \{f > t_n\},$$

quindi  $\{f > t\}$  è misurabile per ogni  $t$ . Per quanto detto questo mostra  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ .

$\Rightarrow$ ) Supponiamo ora che  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Sia  $s_n \leq s_{n+1}$  una successione di funzioni semplici tale che  $f = \sup s_n$ . Osserviamo che  $S_f = \bigcup_n S_{s_n}$ , quindi se ogni sottografico di funzioni semplici è misurabile allora anche  $S_f$  lo è in quanto unione numerabile di misurabili (i misurabili sono una  $\sigma$ -algebra).

Sia allora  $s$  semplice e scriviamo

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i} \quad \text{con } E_i \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \text{ disgiunti.}$$

Osserviamo che

$$S_s = \bigcup_{i=1}^N E_i \times (-\infty, c_i),$$

cioè i sottografici di funzioni semplici sono unione finita di misurabili e questo conclude.

$f \geq 0$ ) Osservo che se  $s$  è semplice e  $s \geq 0$  allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} s = \sum_{i=1}^N c_i \mathcal{L}(E_i) = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}(E_i \times [0, c_i]) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^N E_i \times [0, c_i]\right) = \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)).$$

Se  $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$  e  $f \geq 0$  allora scrivo  $f = \sup s_n$  con  $s_n$  semplici come abbiamo già fatto più volte. Usando il fatto che la tesi vale per le semplici concludiamo applicando **Convergenza monotona / Beppo-Levi** al membro sinistro e la  $\sigma$ -additività della misura di Lebesgue al membro destro.  $\square$

*Osservazione 3.100.*

Consci di questo risultato avremmo potuto definire equivalentemente per  $f \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \mathcal{L}(S_f \cap \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)).$$

### 3.3.6 Operatori di composizione

**Definizione 3.101** (Funzioni di Carathéodory).

Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio di misura. Una funzione  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **di Carathéodory** se

1.  $f(x, \cdot)$  è continua per *quasi ogni*  $x \in X$ ,
2.  $f(\cdot, t)$  è misurabile per *ogni*  $t \in \mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>Più formalmente dovremmo proiettare  $S_f \cap \{y = t\}$  sulle prime  $n$  entrate.

*Osservazione 3.102.*

Se  $\{u_k\}$  è una successione in  $L^1(X)$  tale che  $u_k \rightarrow u$  in  $L^1(X)$  allora esistono  $n_k$  e  $g \geq 0$  con  $g \in L^1(X)$  tali che

$$\forall x \in X, \quad u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$$

e

$$\forall x \in X, \quad |u_{n_k}(x)| \leq g(x).$$

**Proposizione 3.103.**

Sia  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Carathéodory tale che esistono  $C > 0$  e  $h \geq 0$  misurabile tale che  $\int_X h \in \mathbb{R}$  tali che

$$|f(x, t)| \leq h(x) + C|t|.$$

Allora

1. per ogni  $u \in \mathcal{M}(X)$ , la funzione

$$T(u) : \begin{array}{l} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x, u(x)) \end{array}$$

è misurabile e

2.  $T : L^1 \rightarrow L^1$  continua per successioni.

*Dimostrazione.*

- 1) Se  $u = \sum c_i \chi_{E_i}$  è semplice allora per verifica diretta

$$f(x, u) = \sum f(x, c_i) \chi_{E_i}(x),$$

e questa è misurabile perché prodotto e somma finiti di misurabili.<sup>6</sup> Per il caso generale costruiamo  $s_n$  semplici tali che  $s_n \rightarrow u$  puntualmente. Segue dalla continuità di  $f(x, \cdot)$  che per quasi ogni  $x \in X$

$$f(x, s_n(x)) \rightarrow f(x, u(x)).$$

In quanto limite puntuale di misurabili si ha che  $f(x, u(x))$  è misurabile (3.55)

- 2) buona definizione) Osserviamo che se  $u \in L^1$  allora  $T(u) \in L^1$ , infatti

$$\|T(u)\|_{L^1} = \int_X |f(x, u(x))| \leq \underbrace{\int_X h}_{\in \mathbb{R} \text{ per hyp.}} + C \underbrace{\int_X |u|}_{\in \mathbb{R} \text{ perché } u \in L^1} \in \mathbb{R}.$$

Convergenza con continuità) Sia  $u_n$  una successione tale che  $u_n \rightarrow u$  in  $L^1$ . Vogliamo mostrare che  $T(u_n) \rightarrow T(u)$  in  $L^1(X)$ . Osserviamo che possiamo estrarre una sottosuccessione tale che  $\forall x \in X$  si ha  $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$  e  $|u_{n_k}| \leq g$  con  $g \in L^1$  (e quindi tale che  $\int g \in \mathbb{R}$ ). Segue che per quasi ogni  $x \in X$

$$f(x, u_{n_k}(x)) \rightarrow f(x, u(x)).$$

Dato che

$$|f(x, u_{n_k}(x))| \leq h(x) + Cg(x)$$

si ha per il Teorema di **Convergenza dominata / Lebesgue** che

$$\|T(u_{n_k}) - T(u)\|_{L^1} = \int_X |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))| \rightarrow 0,$$

cioè  $T(u_{n_k}) \rightarrow T(u)$  in  $L^1$ . Segue allora che  $T(u_n) \rightarrow T(u)$ , infatti: Siccome  $u_n \rightarrow u$ , per  $h > n_k$  si ha definitivamente che per quasi ogni  $x \in X$

$$\begin{aligned} |f(x, u_h(x)) - f(x, u(x))| &\leq |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))| \implies \\ &\implies \|T(u_h) - T(u)\| \leq \|T(u_{n_k}) - T(u)\|. \end{aligned}$$

□

<sup>6</sup>per dire che  $f(x, c_i)$  è misurabile abbiamo usato l'ipotesi che  $f$  fosse Carathéodory, in particolare abbiamo usato  $f(\cdot, t)$  misurabile per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Se fosse stato solo per quasi ogni non avremmo potuto concludere.

### 3.3.7 Teorema del cambio di variabile

In questa sezione proveremo a rispondere alle seguenti domande:

Data  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Phi \in C^1(\Omega)$  e considerato  $E \subseteq \Omega$  misurabile secondo Lebesgue

1.  $\Phi(E)$  è misurabile?
2. Se sì, posso stimare  $|\Phi(E)|$ ?

**Proposizione 3.104** (Caso lineare).

Sia  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita come

$$\Phi(x) = Lx \quad \text{con } L \in M(n, \mathbb{R}).$$

Si ha che

1.  $\det L = 0 \implies |\Phi(E)| = 0$ .
2.  $\det L \neq 0 \implies |\Phi(E)| = |\det L||E|$ .

*Dimostrazione.*

1) Da  $\det L = 0$  segue che  $\dim \text{Imm } L < n$ . In questo caso  $\text{Imm } L$  è un sottospazio vettoriale proprio di  $\mathbb{R}^n$ , quindi  $|\text{Imm } L| = 0$ . Dato che  $\Phi(E) \subseteq \text{Imm } L$  si deve avere che  $|\Phi(E)| = 0$ .

2) Osserviamo che per ogni  $K$  compatto e  $A$  aperto,  $\Phi(K)$  e  $\Phi(A)$  sono rispettivamente compatto e aperto, il primo segue per continuità e il secondo dal fatto che le lineari mandano una base della topologia euclidea (cubi aperti) in un'altra base (parallelepipedi aperti della stessa dimensione). Segue che  $\Phi(E)$  è misurabile per regolarità della misura di Lebesgue (3.26).

Siccome la misura di Lebesgue è invariante per traslazione la forma di  $E$  non è rilevante, quindi

$$|\Phi(E)| = c(L)|E| \quad \text{dove } c(L) = |\Phi([0, 1]^n)|.$$

Resta da mostrare che  $c(L) = |\det L|$ . La tesi segue dai seguenti passi:

- $c(LT) = c(L)c(T)$  (segue dal fatto che  $|\Phi(E)| = c(L)|E|$ )
- Se  $L$  è ortogonale sappiamo che si può decomporre in riflessioni, dunque  $c(L) = 1$ .
- Se  $L$  è diagonale con entrate  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  allora

$$\Phi([0, 1]^n) = \prod_{i=1}^n [0, \lambda_i] \implies |\Phi([0, 1]^n)| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |\det L|$$

- Se  $L$  è una matrice qualunque sappiamo che  $L = ADB$  con  $D$  diagonale e  $A, B$  ortogonali. Segue che

$$c(L) = |\det L| = |\det D| = c(D).$$

□

*Dimostrazione alternativa di  $c(L) = |\det L|$ .*

Se  $L = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$  osserviamo che possiamo sostituire  $L$  con una matrice  $\tilde{L}$  che ha lo stesso determinante ma ha le colonne ortogonali. A quel punto è semplice verificare la tesi.

Per costruire  $\tilde{L}$  procediamo iterativamente: consideriamo il piano generato da  $v_1$  e  $v_2$  e sostituiamo  $v_2$  con la sua proiezione sulla retta ortogonale a  $v_1$  (che chiamiamo  $v'_2$ ). In questa proiezione abbiamo trasformato un parallelogramma in un rettangolo con stessa base e stessa altezza (e quindi stessa area), mentre le altre dimensioni sono state lasciate invariate. Consideriamo ora lo spazio generato da  $v_1, v'_2$  e  $v_3$ . Sostituiamo  $v_3$  con la sua proiezione sulla retta ortogonale al piano  $v_1, v'_2$  e come prima abbiamo la stessa area ma con  $v_1, v'_2$  e  $v'_3$  ortogonali. Reiterando trovo  $\tilde{L}$ . □

*Osservazione 3.105* (Moduli di continuità).

Ricordiamo che un **modulo di continuità** è una funzione monotona crescente  $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  continua in 0 e tale che  $\omega(0) = 0$ .

Una funzione  $f$  **ammette modulo di continuità** se

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

È possibile mostrare che  $f$  ammette modulo di continuità se e solo se  $f$  è uniformemente continua. È possibile verificare che la seguente definizione fornisce un modulo di continuità (detto modulo di continuità **ottimale**)

$$\omega(t) = \max_{|x-y|<t} |f(x) - f(y)|.$$

**Definizione 3.106** (Insieme F-sigma).

Affermiamo che  $K$  è **F-sigma** (e scriviamo  $K \in \mathcal{F}_\sigma$ ) se è possibile scrivere  $K$  come unione numerabile di compatti.

**Lemma 3.107.**

Se  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è diffeomorfismo di classe  $C^1$ , allora per ogni compatto  $K$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $r_0$  tale che per ogni  $r \in (0, r_0)$  e per ogni  $x_0 \in K$

$$\Phi(Q_r(x_0)) \subseteq F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0)),$$

dove

$$F_{x_0}(x) = \Phi(x_0) + \mathcal{D}\Phi(x_0)(x - x_0) \quad \text{troncamento di Taylor}$$

e

$$Q_r(x_0) = \prod_{i=1}^n \left[ (x_0)_i - \frac{r}{2}, (x_0)_i + \frac{r}{2} \right] = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_\infty \leq \frac{r}{2} \right\} \quad \text{cubo centrato in } x_0 \text{ di lato } r.$$

*Dimostrazione.*

Definiamo l'insieme

$$M = \{x \in \Omega \mid d_\infty(x, K) < \varepsilon\}, \quad \text{dove ricordiamo } d_\infty(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|_\infty.$$

Sappiamo che  $d_\infty(\cdot, K)$  è continua per l'equivalenza delle norme su  $\mathbb{R}^n$  (1.57), quindi  $M$  è chiuso (controimmagine di  $[0, \varepsilon]$ ) e limitato ( $K$  è limitato e questi sono i punti che si allontanano da  $K$  al massimo di una quantità fissata), segue che  $M$  è compatto. In particolare  $\Phi(M)$  è compatto e dunque  $\mathcal{D}\Phi^{-1}(\Phi(M))$  è limitato, per esempio da  $B_\infty(0, C)$  con  $C > 0$ .

Consideriamo ora  $y \in \Phi(Q_r(x_0))$  con un certo  $r > 0$  e definiamo  $x \in Q_r(x_0)$ ,  $x' \in K$  tali che  $\Phi(x) = y = F_{x_0}(x')$ . Si ha che

$$\begin{aligned} \|x - x'\|_\infty &= \|\mathcal{D}\Phi(x_0)^{-1} \mathcal{D}\Phi(x_0)(x - x')\|_\infty \leq \\ &\leq \|\mathcal{D}\Phi(x_0)^{-1}\|_\infty \|\mathcal{D}\Phi(x_0)(x - x')\|_\infty \leq \\ &\leq C \|\mathcal{D}\Phi(x_0)(x - x') + \Phi(x_0) - \Phi(x_0)\|_\infty = \\ &= C \|F_{x_0}(x) - F_{x_0}(x')\|_\infty = \\ &= C \|F_{x_0}(x) - \Phi(x)\|_\infty. \end{aligned}$$

Studiamo l'ultimo termine:

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - (F_{x_0})(x)\|_\infty &= \|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \mathcal{D}\Phi(x_0)(x - x_0)\|_\infty \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \\ &= \|(\mathcal{D}\Phi(\xi) - \mathcal{D}\Phi(x_0))(x - x_0)\|_\infty \leq \\ &\leq \|\mathcal{D}\Phi(\xi) - \mathcal{D}\Phi(x_0)\|_\infty \|x - x_0\|_\infty \leq \\ &\leq r\omega(r), \end{aligned}$$

dove  $\omega(r)$  è il modulo di continuità ottimale di  $\mathcal{D}\Phi$  come mappa da  $\mathbb{R}^n$  a  $M(n, \mathbb{R})$ , che esiste per il **Teorema di Heine-Cantor** in quanto  $\mathcal{D}\Phi$  è continua e stiamo lavorando su un compatto.

Combinando questo con quanto avevamo trovato prima si ha che

$$\|x - x'\|_\infty \leq C \|F_{x_0}(x) - \Phi(x)\|_\infty \leq Cr\omega(r),$$

osserviamo dunque che scegliendo  $r_0$  tale che  $\omega(r_0) < \varepsilon/C$  allora si ha

$$\|x - x'\|_\infty < r\varepsilon,$$

e dato che  $x \in Q_r(x_0)$  questo implica che  $x' \in Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0)$ , quindi  $y = F_{x_0}(x') \in F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0))$  come volevamo.  $\square$

**Lemma 3.108.**

Se  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è diffeomorfismo di classe  $C^1$  e per una norma di matrici vale  $\|\mathcal{D}\Phi(x)\| \leq C$  per ogni  $x$ , allora

1. se  $E \subseteq \Omega$  è misurabile allora  $\Phi(E)$  è misurabile e

$$2. |\Phi(E)| \leq \int_E |J_\Phi(x)| dx.$$

*Dimostrazione.*

Misurabili in misurabili) Osserviamo che per ogni  $r$  e per ogni  $x_0$  si ha

$$\begin{aligned} \Phi(B(x_0, r)) &= \{\Phi(v) \mid |v - x_0| < r\} = \\ &= \{\Phi(x_0) + \mathcal{D}\Phi(\xi)(v - x_0) \mid |v - x_0| < r, \xi \in [v, x_0]\} \subseteq \\ &\subseteq \{w \mid |w - \Phi(x_0)| < Cr\} = B(\Phi(x_0), Cr). \end{aligned}$$

Segue dunque che se  $|N| = 0$  allora  $|\Phi(N)| = 0$ , infatti se copro  $N$  con insiemi di misura  $\varepsilon$ , copro  $\Phi(N)$  con uno di misura  $C\varepsilon$ , ma per  $\varepsilon \rightarrow 0$  entrambe le misure vanno a zero.

Per continuità di  $\Phi$  sappiamo che se  $K$  è compatto allora  $\Phi(K)$  è compatto. Da questo segue se  $K \in \mathcal{F}_\sigma$  allora  $\Phi(K) \in \mathcal{F}_\sigma$  in quanto  $\Phi$  rispetta le unioni.

Osserviamo che i plurirettangoli numerabili sono unioni numerabili di compatti, quindi gli aperti sono insiemi  $\mathcal{F}_\sigma$ . Segue dunque che se  $B$  è boreliano,  $\Phi(B)$  è boreliano. Per la regolarità della misura di Lebesgue (3.26) e la continuità di  $\Phi$  questo mostra che  $\Phi$  manda misurabili in misurabili.

Stima della misura) Consideriamo il caso di un cubo. Osserviamo che possiamo decomporre un cubo in unione finita disgiunta (se non per insiemi di misura nulla) di cubi di lato arbitrariamente piccolo. Supponiamo quindi che il nostro cubo sia piccolo abbastanza da rispettare la tesi del lemma precedente, cioè

$$\Phi(Q_r(x_0)) \subseteq F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0))$$

con  $x_0$  e  $\varepsilon > 0$  fissati. Passando alle misure si ha

$$\begin{aligned} |\Phi(Q_r(x_0))| &\leq |F_{x_0}(Q_{(1+\varepsilon)r}(x_0))| \stackrel{\text{caso lineare}}{=} |J_\Phi(x_0)|(1+\varepsilon)^n r^n = \\ &= (1+\varepsilon)^n \int_{Q_r(x_0)} |J_\Phi(x_0)| dx = \\ &= (1+\varepsilon)^n \int_{Q_r(x_0)} |J_\Phi(x)| + \underbrace{(|J_\Phi(x_0)| - |J_\Phi(x)|)}_{\leq \varepsilon \text{ per } r_0 \text{ abbastanza piccolo}} \leq \\ &\leq (1+\varepsilon)^n \int_{Q_r(x_0)} |J_\Phi(x)| dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^n r^n. \end{aligned}$$

Consideriamo ora  $E \subseteq K$  con  $K$  compatto esprimibile come unione di cubi di lato minore di  $r_0$  (con la notazione del lemma precedente). Esplicitamente  $E = \bigcup Q_i$  con  $Q_i$

cubi tali che  $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$  per  $r_i < r_0$  e  $x_i \in K$  e  $|Q_i \cap Q_j| = 0$  per  $i \neq j$ . Dal risultato di sopra segue che

$$|\Phi(E)| \leq (1 + \varepsilon)^n \int_E |J_\Phi(x)| dx + \varepsilon(1 + \varepsilon)^n |E|.$$

Sia ora  $A$  aperto. Sappiamo che  $A = \bigcup E_i$  con  $E_n \subseteq E_{n+1}$  e  $E_n$  unione numerabile di cubi. Con metodi analoghi

$$|\Phi(A)| \leq (1 + \varepsilon)^n \int_A |J_\Phi(x)| dx + \varepsilon(1 + \varepsilon)^n |A|.$$

Consideriamo ora  $E$  misurabile con  $|E| \in \mathbb{R}$  e sia  $E \subseteq A$  con  $|A| \leq |E| + \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} |\Phi(E)| &\leq |\Phi(A)| \leq (1 + \varepsilon)^n \int_A |J_\Phi(x)| dx + \varepsilon(|E| + \varepsilon)(1 + \varepsilon)^n \leq \\ &\leq (1 + \varepsilon)^n \int_E |J_\Phi(x)| dx + \|J_\Phi\|_\infty \varepsilon(1 + \varepsilon)^n + \varepsilon(|E| + \varepsilon)(1 + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

e trovo la tesi per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

**Corollario 3.109.**

Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è misurabile e  $f \geq 0$  allora

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \leq \int_\Omega (f \circ \Phi) |J_\Phi|.$$

*Dimostrazione.*

Se  $f = \chi_{\Phi(E)}$  allora  $f \circ \Phi = \chi_E$ , dunque la tesi vale osservando che

$$\int_{\Phi(\Omega)} \chi_{\Phi(E)} = |\Phi(E)| \quad \text{e} \quad \int_\Omega (\chi_{\Phi(E)} \circ \Phi) |J_\Phi| = \int_\Omega \chi_E |J_\Phi(x)| = \int_E |J_\Phi(x)|.$$

Se  $f$  è semplice vale per linearità e se  $f$  è una misurabile non negativa generale basta approssimarla con semplici nel modo noto e passare al sup a entrambi i membri. □

**Corollario 3.110** (Lemma di Sard).

Se  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$  e  $Z = \{x \mid J_\Phi(x) = 0\}$  allora

$$|\Phi(Z)| \leq \int_X |J_\Phi(x)| = 0.$$

**Teorema 3.111** (Teorema del Cambio di variabile).

Sia  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\Phi \in C^1$  iniettiva, allora

1. se  $E \subseteq \Omega$  è misurabile allora  $\Phi(E)$  è misurabile e

$$|\Phi(E)| = \int_E |J_\Phi(x)| dx \quad \text{dove } J_\Phi = \det(\mathcal{D}\Phi) \text{ è lo Jacobiano}$$

2. Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è misurabile con  $f \geq 0$  o  $f \in L^1(\Omega)$  allora

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y) dy = \int_\Omega (f \circ \Phi)(x) |J_\Phi(x)| dx.$$

*Dimostrazione.*

Supponiamo  $\Phi^{-1} \in C^1$  (vero se  $J_\Phi(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \Omega$ ). Osserviamo che

$$|J_\Phi(x) J_{\Phi^{-1}}(\Phi(x))| = |\det(\mathcal{D}\Phi(x) \mathcal{D}\Phi^{-1}(\Phi(x)))| = 1,$$

dunque se  $f$  è misurabile non negativa

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \leq \int_\Omega (f \circ \Phi) |J_\Phi| \leq \int_{\Phi(\Omega)} (f \circ \Phi \circ \Phi^{-1}) |J_\Phi| |J_{\Phi^{-1}}| = \int_{\Phi(\Omega)} f$$

dove la seconda disuguaglianza segue applicando nuovamente il lemma ma usando  $\Phi^{-1}$  al posto di  $\Phi$ . Il caso  $L^1$  segue per linearità. □

Il teorema si chiama “cambio di variabile” perché se immaginiamo di porre  $y = \Phi(x)$  l'espressione del secondo punto ci da un modo di passare da integrali in  $x$  a integrali in  $y$  e viceversa.

È possibile generalizzare il teorema al risultato seguente:

**Teorema 3.112** (Cambio di Variabile Generalizzato).

Sia  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  ma non necessariamente iniettiva, allora per ogni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  misurabile e non negativa o  $f \in L^1$ , posto  $N(y) = \#\phi^{-1}(y)$ , si ha che

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)N(y)dy = \int_{\Omega} (f \circ \Phi)(x)|J_{\Phi}(x)|dx.$$

Intuitivamente è lo stesso teorema ma stiamo tenendo conto delle “sovrapposizioni” che si creano a causa del fatto che  $\Phi$  non è iniettiva.

### Sostituzioni notevoli

**Proposizione 3.113** (Coordinate polari).

Sia la funzione di cambio di variabili

$$\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \doteq (x, y),$$

allora  $J_{\Phi} = \rho$  e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\rho d\theta d\rho.$$

*Dimostrazione.*

$$J_{\Phi} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \rho.$$

□

**Proposizione 3.114** (Coordinate cilindriche).

Sia la funzione di cambio di variabili

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \doteq (x, y, z),$$

allora  $J_{\Phi} = \rho$  e

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y)dx dy dz = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)\rho d\theta d\rho dz.$$

*Dimostrazione.*

$$J_{\Phi} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

□

**Proposizione 3.115** (Coordinate sferiche).

Sia la funzione di cambio di variabili

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \doteq (x, y, z),$$

allora  $|J_{\Phi}| = \rho^2 \sin \varphi$  e

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)dx dy dz = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)\rho^2 \sin(\varphi)d\varphi d\theta d\rho.$$

*Dimostrazione.*

$$J_{\Phi} = \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} = -\rho^2 \sin \varphi.$$

□

### Solidi di rotazione e calcolo dei volumi

**Definizione 3.116** (Solido di rotazione).

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  è detto **solido di rotazione** se esistono valori  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  e due funzioni  $g_1 \leq g_2$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  tali che

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g_2(z)\}.$$

**Proposizione 3.117** (Misura di un solido di rotazione).

Se  $E$  è un solido di rotazione con la notazione adottata sopra allora

$$|E| = \pi \int_{z_1}^{z_2} (g_2(z)^2 - g_1(z)^2) dz.$$

*Dimostrazione.*

Se  $\Phi$  è la mappa che definisce le coordinate cilindriche, osserviamo che

$$\Phi^{-1}(E) = \{z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq \rho \leq g_2(z)\},$$

dunque applicando il teorema del cambio di variabili

$$\begin{aligned} |E| &= \int_{\Phi^{-1}(E)} \rho d\rho d\theta dz \stackrel{\text{Fub. Ton.}}{=} \int_{z_1}^{z_2} \int_0^{2\pi} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \rho d\rho d\theta dz = \\ &= \pi \int_{z_1}^{z_2} (g_2(z)^2 - g_1(z)^2) dz. \end{aligned}$$

□

**Definizione 3.118** (Baricentro).

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  misurabile, il suo **baricentro** è il punto definito da

$$B_E = \frac{1}{|E|} \int_E X dX \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 3.119** (Teorema di Guldino).

Se  $E$  è il solido di rotazione definito da  $z_1, z_2, g_1, g_2$  e  $D$  è una sua mezza sezione, cioè

$$D = \{(x, z) \mid z_1 \leq z \leq z_2, g_1(z) \leq x \leq g_2(z)\},$$

allora, se  $B_D = (b_1, b_2)$  è il baricentro di  $D$ , si ha che

$$|E| = 2\pi b_1 |D|.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$b_1 = \frac{1}{|D|} \int_D x dx, \quad b_2 = \frac{1}{|D|} \int_D z dz,$$

da cui

$$|E| = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} x dx dz = 2\pi \int_D x = 2\pi |D| b_1.$$

□

## Capitolo 4

# Funzioni integrabili e serie di Fourier

### 4.1 Spazi di funzioni integrabili

#### 4.1.1 Assoluta continuità dell'integrale

**Proposizione 4.1** (Borel-Cantelli).

Se  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  è uno spazio di misura e  $A_j$  sono insiemi misurabili tali che  $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty$  allora

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j \geq n} A_j\right) = 0.$$

*Dimostrazione.*

Definiamo  $F_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$  e  $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ .

Osserviamo che per la convergenza della serie  $\sum \mu(A_i)$  si ha che

$$\mu(F_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_k) \xrightarrow{n} 0$$

e quindi

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j \geq n} A_j\right) = \mu(F) = \inf\{\mu(F_n)\} = 0.$$

□

**Proposizione 4.2** (Assoluta continuità dell'integrale).

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura e sia  $f \in \mathcal{L}^1(X)$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$A \in \mathcal{E} \text{ e } \mu(A) < \delta \implies \int_A |f| d\mu < \varepsilon,$$

cioè

“Integrare su domini abbastanza piccoli restituisce un risultato arbitrariamente piccolo”

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che esista  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $A_n$  misurabile tale che

$$\mu(A_n) \leq 2^{-n} \text{ ma } \int_{A_n} |f| d\mu \geq \varepsilon.$$

Definiamo  $F_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$  e  $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ . Per **Borel-Cantelli**  $F$  è trascurabile. Osserviamo anche che  $\chi_{F_n} \rightarrow \chi_F$  per ogni  $x \in X$ .

Valutiamo dunque il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \int_{A_n} |f| d\mu &= \int_X |f| \chi_{A_n} d\mu \stackrel{A_n \subseteq F_n}{\leq} \\ &\leq \int_X |f| \chi_{F_n} d\mu. \end{aligned}$$

Dato che  $|f| \chi_{F_n} \leq |f| \in L^1(X)$  possiamo applicare il teorema di **Convergenza dominata / Lebesgue** per trovare che

$$\int_X |f| \chi_{F_n} d\mu \rightarrow \int_X |f| \chi_F d\mu \stackrel{\mu(F) = 0}{=} 0.$$

Abbiamo quindi mostrato che

$$0 < \varepsilon < \int_{A_n} |f| d\mu \rightarrow 0,$$

che è assurdo. □

### 4.1.2 Funzioni p-integrabili

Come per  $\mathbb{R}^n$  e gli spazi di successioni, possiamo provare a dotare le funzioni integrabili della struttura di spazio di Banach definendo delle norme-p.

**Definizione 4.3** (Funzioni p-integrabili).

Sia  $(X, \mathcal{E}, \mu)$  uno spazio di misura. Poniamo

$$\mathcal{L}^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ misurabile, } \int_X |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

**Definizione 4.4** (Spazio  $L^p$ ).

Consideriamo la relazione di equivalenza  $f \sim g \iff \tilde{\forall} x \in X, f(x) = g(x)$  (identifico funzioni che sono uguali quasi ovunque). Definiamo

$$L^p(X, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mu) / \sim.$$

In futuro considereremo  $L^p$  munito della norma  $\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$  se non altrimenti specificato.

*Osservazione 4.5.*

Possiamo definire

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{ f \text{ misurabile} \mid \exists c > 0 \text{ t.c. } \mu(\{x \mid |f(x)| > c\}) = 0 \}$$

lo spazio delle quasi ovunque limitate e in analogia a prima troviamo  $L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty / \sim$ , che dotiamo della norma  $\|f\|_\infty = \inf \{ c > 0 \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > c\}) = 0 \}$ .

*Osservazione 4.6.*

Per  $p = 1$  troviamo esattamente le funzioni Lebesgue-integrabili.

**Lemma 4.7** (Disuguaglianza di Hölder).

Siano  $f \in L^p(X)$  e  $g \in L^q(X)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora

$$\int |f| |g| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Dimostrazione.*

Ricordiamo la **Disuguaglianza di Young**:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Consideriamo prima il caso in cui  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ :

$$\int_X |f| |g| d\mu \leq \int_X \left( \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} \right) d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Per ricavare la tesi nel caso generale poniamo

$$\hat{f} = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \hat{g} = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Osserviamo che per linearità dell'integrale  $\|\hat{f}\|_p = \|\hat{g}\|_q = 1$ , da cui

$$\int_X |f| |g| d\mu = \|f\|_p \|g\|_q \int_X |\hat{f}| |\hat{g}| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \cdot 1.$$

□

**Teorema 4.8** (Gli spazi  $L^p$  sono Banach).

*Gli spazi  $L^p$  e  $L^\infty$  definiti sopra sono spazi di Banach.*

*Dimostrazione.*

Ricordiamo che gli spazi di Banach sono gli spazi normati completi. Dobbiamo quindi verificare che  $\|\cdot\|_p$  è una norma e che ogni successione di Cauchy converge.

Normato) Verifichiamo gli assiomi di norma:

1.  $\|f\|_p \geq 0$ ,  $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ ) Stiamo integrando una potenza positiva di un valore assoluto, quindi  $\|f\|_p \geq 0$ .

Per una nota proprietà degli integrali (3.68)

$$\int_X |f|^p d\mu = 0 \iff 0 = \mu(\{|f|^p > 0\}) = \mu(\{|f| > 0\}) = \mu(\{f \neq 0\}),$$

cioè  $f \sim 0$  e quindi  $f = 0$  in  $L^p$ .

2.  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ ) Segue dalla linearità dell'integrale.
3.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ) Osserviamo che se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  allora  $p - 1 = p/q$ . Consideriamo dunque  $\|f + g\|_p^p$ :

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X \underbrace{|f + g|}_{\in L^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu \leq \\ &\leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_X |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) (\|f + g\|_p^p)^{1/q} = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Mettendo le disuguaglianze sulla stessa riga

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1} \implies \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Completo*) Sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(X)$  una successione di Cauchy per la norma  $p$ , cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N = N_\varepsilon$  tale che

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Siano  $n_k = N_{2^{-k}}$  (che senza perdita di generalità supponiamo strettamente crescenti in  $k$ ). Osserviamo che questa scelta impone  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}$ . Verifichiamo che  $\tilde{f}_k = f_{n_k}$  converge in  $L^p(X)$ , da questo seguirà che  $f_n$  converge allo stesso limite in quanto successione di Cauchy.

Poniamo

$$g_n(x) = |\tilde{f}_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|.$$

Osserviamo che

$$\|g_n\|_p \leq \|\tilde{f}_1\|_p + \sum_{k=1}^{n-1} \|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p \leq \|\tilde{f}_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_p}_{< 2^{-k}} \leq \|\tilde{f}_1\|_p + 1.$$

Se definiamo  $g(x) = \sup g_n(x) = \lim g_n(x)$  (chiaramente  $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$  per ogni  $n$ ) si ha per monotonia delle potenze e **Convergenza monotona / Beppo-Levi** che

$$\int_X |g_n|^p d\mu \rightarrow \int_X |g|^p d\mu \in \mathbb{R},$$

in particolare  $g(x) \in \mathbb{R}$  per quasi ogni  $x \in X$ . Più esplicitamente, se poniamo  $X_0 = \{g(x) \in \mathbb{R}\}$  si ha che  $\mu(X \setminus X_0) = 0$ .

Osserviamo ora che per evidente telescopicità

$$\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)),$$

definiamo quindi il candidato limite come

$$f(x) = \tilde{f}_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)).$$

Per definizione di  $g$ , se  $g(x) \in \mathbb{R}$  allora la serie che definisce  $f$  è assolutamente convergente. Si ha dunque per per ogni  $x \in X_0$

$$|\tilde{f}_n(x)| \leq g_n(x) \leq g(x) \implies |\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p \leq (|\tilde{f}_n(x)| + |f(x)|)^p \leq (2g(x))^p,$$

inoltre

$$\tilde{f}_n(x) \rightarrow f(x) \implies |\tilde{f}_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \implies |\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0.$$

Date queste condizioni, siccome  $\int_X (2g)^p d\mu \in \mathbb{R}$ , possiamo applicare il teorema di **Convergenza dominata / Lebesgue** e trovare che

$$\|\tilde{f}_n - f\|_p^p = \int_X |\tilde{f}_n(x) - f(x)|^p d\mu \rightarrow 0,$$

cioè  $\tilde{f}_n \rightarrow f$  secondo la norma  $p$ . Per concludere basta osservare che

$$0 \leq \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X |g|^p d\mu \in \mathbb{R}.$$

Il caso di  $L^\infty$  non è stato trattato a lezione<sup>1</sup>. □

<sup>1</sup>dato per esercizio.

**Corollario 4.9.**

Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  allora esiste una sottosuccessione di  $f_n$  tale che  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  quasi ovunque e per un'opportuna  $0 \leq g \in L^p$  si ha  $|f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ .

*Dimostrazione.*

La sottosuccessione si costruisce come nella dimostrazione della completezza di  $L^p(X)$ .  $\square$

**Notazione 4.10.**

La disuguaglianza

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

su  $L^p$  viene detta **disuguaglianza di Minkowski**.

**4.1.3 Funzioni continue a supporto compatto**

**Definizione 4.11** (Spazio delle funzioni continue a supporto compatto).

Definiamo lo **spazio delle funzioni continue a supporto compatto** su  $X$  come

$$C_C(X) = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \exists K \subseteq X \text{ compatto t.c. } f(X \setminus K) = \{0\}\}.$$

*Osservazione 4.12.*

$C_C(X)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.*

Siano  $f, g$  continue tali che  $\text{supp } f \subseteq A$  e  $\text{supp } g \subseteq B$  con  $A$  e  $B$  compatti. Dati  $a, b \in \mathbb{R}$  sappiamo già che  $af + bg$  è continua. Per concludere osserviamo che  $\text{supp}(af + bg) \subseteq A \cup B$ , che è compatto in quanto unione finita di compatti.  $\square$

**Definizione 4.13** (Funzioni infinitesime).

Definiamo

$$C_0(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^N) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}$$

**Lemma 4.14.**

Sia  $\mu$  una misura di Borel su  $\mathbb{R}^N$  finita sui compatti, allora se  $A$  è un boreliano (tale che  $\mu(A) \in \mathbb{R}^2$ ) e fissiamo  $\varepsilon > 0$  esiste  $\varphi$  continua tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi - \chi_A| d\mu < \varepsilon.$$

*Dimostrazione.*

Sappiamo che  $\mu$  boreliana su  $\mathbb{R}^N$  finita sui compatti è regolare (3.44).

Siano  $K$  e  $G$  un compatto e un aperto rispettivamente tali che  $K \subseteq A \subseteq G$  e  $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$ .

Poniamo

$$\varphi(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, K)}.$$

Intuitivamente questa è la caratteristica di  $A$  resa continua interpolando tra 1 e 0 nel pezzo compreso tra  $G$  e  $K$ .

Osserviamo che  $\varphi(x) \geq 0$  e che è definita per ogni  $x$ , infatti

$$d(x, G^c) + d(x, K) = 0 \implies d(x, G^c) = 0 \text{ e } d(x, K) = 0 \xrightarrow{\text{chiusi}} x \in G^c \cap K \neq \emptyset, \text{ assurdo.}$$

Osserviamo inoltre che  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$  e che  $\varphi(x) = \chi_A(x)$  se  $x \notin G \setminus K$ .

<sup>2</sup>Nella dimostrazione data è necessario che  $\mu(A) \in \mathbb{R}$ , notiamo infatti che per  $\mu = \mathcal{L}$ ,  $N = 1$  e  $A = \mathbb{R}$  si ha necessariamente che  $G = \mathbb{R}$  e quindi non esiste un compatto  $K$  tale che  $\mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus K) \in \mathbb{R}$ .

Probabilmente è possibile riadattare questa dimostrazione al caso generale, ma dato che useremo il lemma solo per insiemi limitati non trattiamo questa generalizzazione.

Mettendo insieme questi fatti si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi - \chi_A| d\mu = \int_{G \setminus K} |\varphi - \chi_A| d\mu \leq \int_{G \setminus K} 1 d\mu = \mu(G \setminus K) < \varepsilon.$$

□

*Osservazione 4.15.*

Se  $A$  è limitato allora ha automaticamente misura finita e posso scegliere  $\varphi$  a supporto compatto:

se  $A \subseteq B_R(0)$  allora nella dimostrazione al posto di  $G$  considero  $G \cap B_R(0)$ .

**Teorema 4.16** (Continue a supporto compatto sono dense in  $\mathcal{L}^1$ ).

Sia  $\mu$  una misura di Borel su  $\mathbb{R}^N$  tale che per ogni  $K$  compatto  $\mu(K)$  è finita. Allora  $C_C(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $C_C(\mathbb{R}^N)$  denso in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$  è equivalente a richiedere che per ogni  $f$  misurabile tale che  $\int_{\mathbb{R}^N} |f| \in \mathbb{R}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\varphi \in C_C(\mathbb{R}^N)$  tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - \varphi| d\mu < \varepsilon.$$

Senza perdita di generalità suppongo  $f \geq 0$  (da cui  $\int f d\mu$  è finito); il caso generale segue dal fatto che prendere combinazioni lineari mantiene continuità, misurabilità e avere un supporto compatto.

Osserviamo che la successione  $f\chi_{B_n(0)}$  tende a  $f$  quasi ovunque ed è dominata da  $f$ , segue per **Convergenza dominata / Lebesgue** che

$$\int f\chi_{B_n(0)} d\mu \rightarrow \int f d\mu,$$

quindi definitivamente in  $n$  si ha che

$$\int |f - f\chi_{B_n(0)}| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sia  $n$  un naturale che verifica quanto appena detto e poniamo  $\psi = f\chi_{B_n(0)}$ .

Osserviamo che  $\psi \in \mathcal{L}^1$  perché prodotto di integrabili non negative. Per definizione di integrale sappiamo che esiste  $s$  semplice tale che  $0 \leq s \leq \psi$  e

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi - s d\mu < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Applicando la definizione di funzione semplice

$$s = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{A_j}$$

con  $A_j$  misurabili e  $c_j > 0$ . Senza perdita di generalità supponiamo  $A_j \subseteq B_n(0)$ , tanto fuori dalla palla  $\psi$  è nulla.

Sia  $c = \sum_{j=1}^m c_j$ . Applicando il lemma e l'osservazione ( $A_j$  è limitato in  $B_n(0)$ ), sia  $\varphi_j$  continua a supporto compatto tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_j - \chi_{A_j}| d\mu < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Osserviamo che

$$\int \left| s - \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j \right| d\mu = \int \left| \sum_{j=1}^m c_j (\chi_{A_j} - \varphi_j) \right| d\mu \leq \sum_{j=1}^m c_j \int |\chi_{A_j} - \varphi_j| \leq \sum_{j=1}^m c_j \frac{\varepsilon}{3c} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definiamo infine  $\sum_{j=1}^m c_j \varphi_j = \varphi$ . Chiaramente  $\varphi$  è continua a supporto compatto in quanto combinazione lineare di continue a supporto compatto. Per concludere mostriamo che  $\int |f - \varphi| d\mu < \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \int |f - \varphi| d\mu &\leq \int |f - \psi| + \int |\psi - s| + \int |s - \varphi| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

*Osservazione 4.17.*

Possiamo considerare l'immagine di  $C_C(X)$  tramite la relazione di equivalenza

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

Il teorema mostra che l'insieme così ottenuto da  $C_C(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  (la relazione mantiene gli integrali).

**Corollario 4.18.**

*Sia  $\mu$  una misura di Borel su  $\mathbb{R}^N$  tale che per ogni  $K$  compatto  $\mu(K)$  è finita. Allora  $C_C(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  per ogni  $1 \leq p \neq \infty$ .*

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO

□

**Proposizione 4.19** (Continue a supporto compatto in aperto sono dense in  $L^p$ ).

*Se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  è aperto allora  $C_C(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.*

Osserviamo che se  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  allora banalmente  $f\chi_\Omega \in L^p(\Omega)$ , viceversa se  $f \in L^p(\Omega)$  la possiamo estendere a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega \end{cases}$$

per la quale si ha  $\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}$ , cioè  $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . Possiamo quindi pensare a tutte le funzioni come definite su  $\mathbb{R}^N$  e distinguere i domini in base al supporto.

Consideriamo allora  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  con supporto in  $\Omega$ . Dato che  $C_C(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  (4.18), consideriamo  $\varphi \in C_C(\mathbb{R}^N)$  tale che  $\|\varphi - f\|_p < \varepsilon/2$ . Questo ancora non mostra la tesi perché il supporto di  $\varphi$  può non essere contenuto in  $\Omega$  (e quindi  $\varphi$  non corrisponde ad un elemento di  $C_C(\Omega)$ ). Cerchiamo di modificare  $\varphi$  leggermente in modo da trovare la tesi.

Definiamo

$$\Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \right\} \cap B_n(0).$$

Si ha che  $\bar{\Omega}_n$  è compatto in quanto chiuso e limitato, inoltre  $\bar{\Omega}_n \subseteq \Omega$  perché ogni punto di  $\bar{\Omega}_n$  ha distanza non nulla da  $\Omega^c$ . Osserviamo anche che  $\bigcup \Omega_n = \Omega$ . Abbiamo quindi trovato una successione di compatti inscatolati contenuti in  $\Omega$  che tende ad  $\Omega$ .

Definiamo la seguente funzione "pseudo-caratteristica"

$$g_n(x) = \frac{d(x, \Omega_{n+1}^c)}{d(x, \Omega_{n+1}^c) + d(x, \bar{\Omega}_n)}.$$

Si vede facilmente che  $g_n$  ha valori in  $[0, 1]$ , è continua, ben definita e tende alla caratteristica di  $\Omega$  passando al limite in  $n$ .

Osserviamo che per ogni  $x \in \Omega$  (NON in  $\mathbb{R}^N$ ) si ha che  $\varphi_n(x) = g_n(x)\varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$ . Osservando che  $|\varphi_n| \leq |\varphi|$ , abbiamo per **Convergenza dominata / Lebesgue** che  $\varphi_n \rightarrow \varphi$

anche in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  (e quindi anche  $L^p(\Omega)$  considerando  $\varphi_n|_\Omega$  e  $\varphi|_\Omega$ ), quindi esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $\|\varphi - \varphi_m\|_p < \varepsilon/2$ .

Per concludere osserviamo che il supporto di  $\varphi_m$  è contenuto in  $\Omega$  e che

$$\|f - \varphi_m\|_p \leq \|f - \varphi\|_p + \|\varphi - \varphi_m\|_p < \varepsilon,$$

cioè abbiamo costruito una funzione continua a supporto compatto contenuto in  $\Omega$  arbitrariamente vicina a  $f$  in norma  $p$ , dunque passando alle restrizioni ad  $\Omega$  abbiamo trovato  $\varphi_m|_\Omega \in C_C(\Omega)$  arbitrariamente vicina in norma  $p$  a  $f|_\Omega$ , come volevamo.  $\square$

**Proposizione 4.20** (Interazione tra  $L^p$  e continue a supporto compatto).

Sia  $f \in L^p(\Omega)$  per  $1 \leq p \neq \infty$ . Si ha che

- se  $\varphi \in C_C(\Omega)$  allora  $f\varphi \in L^p(\Omega)$  e
- se  $\int_\Omega \varphi f d\mu = 0$  per ogni  $\varphi \in C_C(\Omega)$  allora  $f = 0$  quasi ovunque.

*Dimostrazione.*

★) Dato che  $\varphi$  ha supporto compatto, anche  $f\varphi$  (e quindi  $|f\varphi|^p$ ) ha supporto compatto, segue che

$$\int_\Omega |f\varphi|^p \leq \int_\Omega (\max_\Omega |\varphi|^p) |f|^p = \max_\Omega |\varphi|^p \|f\|_p^p \in \mathbb{R}.$$

★) Sia  $q$  tale che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e consideriamo una successione  $\varphi_n \in C_C(\Omega)$  tale che  $\varphi_n \rightarrow \text{sgn}(f)|f|^{p-1}$  in  $L^q(\Omega)$  tale che si abbia convergenza puntuale quasi ovunque e tale che la convergenza è dominata (estraiamo una sottosuccessione da una qualsiasi in  $C_C(\Omega)$  che converga a quanto indicato usando 4.9). Osserviamo che

$$0 = \int_\Omega \varphi_n f d\mu \rightarrow \int_\Omega \underbrace{f \text{sgn}(f) |f|^{p-1}}_{=|f|^p} d\mu = \|f\|_p^p,$$

dunque per convergenza dominata  $\|f\|_p^p = 0$ , quindi  $f$  è quasi ovunque nulla in  $\Omega$ .  $\square$

In tutta la trattazione abbiamo ignorato  $L^\infty$ , e infatti non valgono gli stessi risultati:

**Proposizione 4.21** (Chiusura in norma infinito delle continue a supporto compatto).

Lavorando in  $L^\infty(\mathbb{R}^N)$  si ha che

$$\overline{C_C(\mathbb{R}^N)} = C_0(\mathbb{R}^N) \neq L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

*Dimostrazione.*

⊆) Mostriamo la contronominale. Sia  $f \notin C_0(\mathbb{R}^N)$ , cioè esiste  $\varepsilon > 0$  tale che per una qualche successione  $x_n$  con  $|x_n| \rightarrow \infty$  si ha

$$|f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Osserviamo allora che se  $g \in C_C(\mathbb{R}^N)$  necessariamente  $\|f - g\|_\infty \geq \varepsilon$ .

⊇) Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  costruiamo  $g_n$  con le seguenti proprietà:

$$0 \leq g_n \leq 1, \quad g_n(B_n(0)) = \{1\}, \quad g_n(\mathbb{R}^N \setminus B_{n+1}(0)) = \{0\},$$

cioè, eccetto per l'anello  $n < |x| < n+1$  abbiamo  $g_n = \chi_{B_n(0)}$ .

Sia  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Osserviamo che

$$0 \leq \|fg_n - f\|_\infty \leq \sup_{|x|>n} |f| \rightarrow 0,$$

quindi abbiamo mostrato che  $f \in \overline{C_C(\mathbb{R}^N)}$ .  $\square$

Per i curiosi [NON DETTO DURANTE IL CORSO], le funzioni che abbiamo costruito approssimando le caratteristiche in questa sezione hanno un nome

**Definizione 4.22** (Funzioni di Urysohn).

Dati due insiemi  $A, B$  chiusi in  $X$ , una funzione  $f : X \rightarrow [0, 1]$  continua tale che  $f(A) = \{0\}$  e  $f(B) = \{1\}$  è detta **funzione di Urysohn**.<sup>3</sup>

#### 4.1.4 Controesempi con integrabili / a supporto compatto

**Proposizione 4.23** (Convergenza in  $C_C(\mathbb{R}^N)$  è diversa da convergenza in  $L^1$ ).

Se  $f_n \rightarrow f$  in  $C_C(\mathbb{R}^N)$  non è detto che  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  nonostante vi sia denso.

*Dimostrazione.*

Diamo un esempio per  $N = 1$ . Consideriamo  $f \in C_C(\mathbb{R})$  tale che  $f \geq 0$  e  $\int f > 0$ . Definiamo  $f_n(x) = f(x - n)$ . Osserviamo che  $f_n(x) \rightarrow 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ha dunque che  $f_n \rightarrow 0$  in  $C_C(\mathbb{R})$ , ma  $\int f_n = \int f > 0$ , quindi  $\int f_n \not\rightarrow 0 = \int 0$ , quindi  $f_n \not\rightarrow 0$  in  $L^1$ .  $\square$

**Proposizione 4.24** (Convergenza in  $L^p$  non implica convergenza quasi ovunque).

Se  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p$  non è detto che  $f_n \rightarrow f$  quasi ovunque.

*Dimostrazione.*

Dato  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , sappiamo che esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$ , sia allora  $0 \leq m = k - 2^n - 1 < 2^n$  e definiamo

$$f_k(x) = \chi_{[0,1]}(2^n x - m) = \chi_{[m2^{-n}, (m+1)2^{-n}]}.$$

Intuitivamente stiamo dividendo l'intervallo  $[0, 1]$  in  $2^n$  pezzi e stiamo facendo scorrere un rettangolino di base  $2^{-n}$  e altezza 1 da 0 a 1. Quando tocca il bordo dividiamo nuovamente l'intervallo e facciamo scorrere di nuovo il rettangolo.

È evidente che se  $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$  allora  $\|f_k\|_1 = 2^{-n}$ , quindi per  $k \rightarrow \infty$  si ha che  $\|f_k\|_1 \rightarrow 0$ , eppure  $f_k$  non converge puntualmente mai perché in quasi ogni punto assume frequentemente i valori 1 e 0.  $\square$

**Esempio 4.25** (Funzione integrabile illimitata su ogni aperto).

Esiste una funzione  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  tale che per ogni aperto  $A$

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty.$$

*Dimostrazione.*

Poniamo

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\log|x| & 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = B \in \mathbb{R}$  (è facile mostrare che  $B = 2$ ).

Imponiamo ora un'enumerazione su  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

e definiamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi(x - r_n) \doteq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n.$$

<sup>3</sup>Il nome deriva dal *lemma di Urysohn*, che garantisce l'esistenza di tali funzioni se  $X$  è uno spazio normale (ogni spazio metrico è normale quindi per i nostri scopi le funzioni di Urysohn esistono sempre).

Osserviamo che  $s_k = \sum_{n=1}^k \varphi_n$  è misurabile perché combinazione lineare finita di misurabili, dunque  $f$  è misurabile. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} \int f &= \int \sup_k s_k = \sup_k \int s_k = \\ &= \sup_k \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \int \varphi(x - r_n) dx = \\ &= B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dunque  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  come volevamo.

Dato che  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ , ogni aperto  $A$  contiene un razionale  $r_n$ , dunque in quell'intorno  $\varphi_n$  non è limitata. Da questo segue che anche  $f$  non è limitata.  $\square$

## 4.2 Serie di Fourier

### 4.2.1 Spazi di Hilbert

**Definizione 4.26** (Prodotto interno).

Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Un **prodotto interno** su un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale  $V$  è una mappa

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v, w) & \longmapsto & \langle v, w \rangle \end{array}$$

con le seguenti proprietà

- $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
- $\langle av + bu, w \rangle = a \langle v, w \rangle + b \langle u, w \rangle$  per ogni  $a, b \in \mathbb{K}$
- Se  $v \neq 0$  allora  $\langle v, v \rangle > 0$ <sup>4</sup>

*Osservazione 4.27.*

Un prodotto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $V$  induce una norma su  $V$  data da

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

**Definizione 4.28** (Spazio di Hilbert).

Uno **spazio di Hilbert** è uno spazio vettoriale reale o complesso munito di prodotto interno completo rispetto alla norma indotta dal prodotto.

**Proposizione 4.29** (Cauchy-Schwarz).

Se  $V$  è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (che induce la norma  $\|\cdot\|$ ) allora per ogni  $x, y \in V$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

*Dimostrazione.*

Dato che  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{C}$  esiste  $\theta \in \mathbb{R}$  tale che  $\langle x, y \rangle = e^{i\theta} |\langle x, y \rangle|$ . Consideriamo allora per ogni  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x + te^{i\theta}y\|^2 &= \langle x + te^{i\theta}y, x + te^{i\theta}y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + t(e^{i\theta} \langle y, x \rangle + e^{-i\theta} \langle x, y \rangle) + t^2 \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + t \underbrace{(e^{i\theta} e^{-i\theta})}_{=1} \langle x, y \rangle + \underbrace{(e^{-i\theta} e^{i\theta})}_{=1} \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| t + t^2 \|y\|^2, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>chiaramente  $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$  perché per la prima proprietà coincide con il proprio coniugato.

abbiamo quindi trovato un polinomio di secondo grado a coefficienti reali che assume solo valori non negativi. Vale dunque la seguente condizione sul discriminante

$$0 \geq \frac{\Delta}{4} = |\langle x, y \rangle|^2 - \|y\|^2 \|x\|^2,$$

da cui la tesi. □

*Osservazione 4.30.*

Fissato  $y \in V$ , la mappa  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  è continua.

*Dimostrazione.*

Sia  $x_n$  una successione in  $V$  che tende a  $x$ . Mostriamo che  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$  in  $V$ :

$$|\langle x, y \rangle - \langle x_n, y \rangle| = |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\| \rightarrow 0 \|y\| = 0.$$

□

## 4.2.2 Definizione ed Esistenza

Per semplicità notazionale poniamo  $I = (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Notazione 4.31** (Funzioni  $L^2$  complesse).

Poniamo

$$L_{\mathbb{C}}^2(I) = \{f(t) = u(t) + iv(t) \mid u, v \in L^2(I)\} \cong L^2(I) \times L^2(I).$$

### Prodotto interno e norma

**Definizione 4.32** (Prodotto scalare standard su  $L_{\mathbb{C}}^2$  e norma indotta).

Definiamo il seguente prodotto scalare normalizzato su  $L_{\mathbb{C}}^2(I)$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Questo prodotto induce la seguente norma

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 + |v(t)|^2 dt.$$

*Osservazione 4.33.*

Se  $\|\cdot\|_2$  indica la norma su  $L^2(I)$  allora

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} (\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2).$$

*Osservazione 4.34.*

Data  $g \in L_{\mathbb{C}}^2$ ,  $\|g\|^2 \leq \|g\|_{\infty}^2$ , dove  $\|g\|_{\infty} = \max_{x \in I} |g(x)|$ .

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\|g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|g\|_{\infty}^2 dt = \|g\|_{\infty}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = \|g\|_{\infty}^2.$$

□

*Osservazione 4.35.*

Lo spazio vettoriale  $L_{\mathbb{C}}^2(I)$  munito del prodotto hermitiano definito sopra è uno spazio di Hilbert.

## Sistema ortogonale di riferimento e proiezioni ortogonali

### Notazione 4.36.

Per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  poniamo

$$e_k(t) = e^{ikt}.$$

**Proposizione 4.37** (Gli  $e_k(t)$  sono un sistema ortogonale).

Gli  $e_k$  sono un sistema ortonormale, cioè

$$\langle e_k, e_h \rangle = \delta_{k,h}.$$

*Dimostrazione.*

Segue calcolando:

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_h \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-iht} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-h)t) dt + i \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((k-h)t) dt. \end{aligned}$$

Se  $k = h$  vediamo che il primo addendo va ad 1 e il secondo a 0, da cui  $\|e_k\| = 1$ .

Se  $k \neq h$  stiamo integrando  $(k-h)$  periodi sia di  $\cos((k-h)t)$  che di  $\sin((k-h)t)$ , ma dato che l'integrale di un periodo è nullo per entrambe le funzioni troviamo che  $\langle e_k, e_h \rangle = 0$ .  $\square$

**Definizione 4.38** (Coefficienti di Fourier).

Data  $f \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$  definiamo il  $k$ -esimo coefficiente di Fourier come

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

**Notazione 4.39.**

Poniamo

$$V_n = \text{Span}(\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n\})$$

**Definizione 4.40** (Proiezioni ortogonali su  $V_n$ ).

Definiamo la **proiezione ortogonale di  $f$  su  $V_n$**  come

$$s_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k.$$

**Proposizione 4.41** (Proprietà delle proiezioni ortogonali).

Valgono le seguenti affermazioni:

1.  $\|s_n f\|^2 = \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2$ .
2.  $\langle f - s_n f, e_h \rangle = 0$  per ogni  $h$  tale che  $|h| \leq n$ .
3.  $\|f - s_n f\|^2 = \min\{\|f - p\|^2 \mid p \in V_n\}$ .
4.  $\|f\|^2 = \|s_n f\|^2 + \|f - s_n f\|^2$ .

*Dimostrazione.*

1) Calcoliamo

$$\begin{aligned}
 \|s_n f\|^2 &= \langle s_n f, s_n f \rangle = \left\langle \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k, \sum_{|h| \leq n} \hat{f}_h e_h \right\rangle \stackrel{\text{continua}}{=} \\
 &= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \left\langle e_k, \sum_{|h| \leq n} \hat{f}_h e_h \right\rangle = \\
 &= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \left\langle \sum_{|h| \leq n} \overline{\hat{f}_h} e_{-h}, e_{-k} \right\rangle \stackrel{\text{continua}}{=} \\
 &= \sum_{|h|, |k| \leq n} \hat{f}_k \overline{\hat{f}_h} \langle e_k, e_h \rangle = \\
 &= \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2.
 \end{aligned}$$

2) Calcoliamo

$$\langle f - s_n f, e_h \rangle = \langle f, e_h \rangle - \langle s_n f, e_h \rangle = \hat{f}_h - \hat{f}_h = 0.$$

3) Sia  $p \in V_n$ . Osserviamo che dati  $a$  e  $b$  vale la seguente identità:

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \|b\|^2$$

quindi se  $b \in V_n$  e  $a \in V_n^\perp$  abbiamo  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ . Consideriamo allora

$$\|f - p\|^2 = \underbrace{\|f - s_n f\|}_{\in V_n^\perp}^2 + \underbrace{\|s_n f - p\|}_{\in V_n}^2 = \|f - s_n f\|^2 + \|s_n f - p\|^2 \geq \|f - s_n f\|^2,$$

inoltre osserviamo che vale l'uguaglianza per  $p = s_n f$ .

4) Usando l'identità del punto precedente per  $p = 0$  troviamo

$$\|f\|^2 = \|f - 0\|^2 = \|s_n f - 0\|^2 + \|f - s_n f\|^2 = \|s_n f\|^2 + \|f - s_n f\|^2.$$

□

**Corollario 4.42** (Disuguaglianza di Bessel).

*Vale la seguente disuguaglianza*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 \leq \|f\|^2$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\|f\|^2 = \|s_n f\|^2 + \|f - s_n f\|^2 = \|f - s_n f\|^2 + \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2.$$

Passando al sup in  $n$

$$\|f\|^2 = \sup_n \|f - s_n f\|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2.$$

□

**Corollario 4.43.**

*Dato che la serie sopra converge,*

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\hat{f}_k| = 0.$$

**Notazione 4.44.**

Definiamo il generato dagli  $e^{ikt}$  come

$$\bar{V} = \bigcup_{n \geq 0} V_n = \text{Span} (\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}).$$

Vogliamo mostrare che questo insieme è denso in  $L^2_{\mathbb{C}}(I)$  in modo da definire quelle che saranno le serie di Fourier. Mostriamo quindi alcuni risultati di densità. Per ottenere il primo citiamo il seguente

**Teorema 4.45** (Teorema di Stone-Weierstrass).

Sia  $T$  compatto e consideriamo le funzioni continue da  $T$  a  $\mathbb{C}$  con la norma infinito. Se  $A \subseteq C(T, \mathbb{C})$  è una sottoalgebra tale che

- $A$  separa i punti, cioè per ogni  $t_1, t_2 \in T$  esiste  $\alpha \in A$  tale che  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ,
- $A$  contiene le costanti e
- Se  $\alpha \in A$  allora  $\bar{\alpha} \in A$  (si intende  $\bar{\alpha}(x) = \overline{\alpha(x)}$ ),

allora  $A$  è densa in  $C(T, \mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

**Corollario 4.46.**

$\bar{V}$  è denso in  $C_C(I)$  per la norma infinito.

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $T = \mathbb{R}/\sim$  dove  $x \sim y$  se e solo se  $x = y + 2k\pi$  per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ . Chiaramente  $C(T, \mathbb{C}) \cong C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , dove quest'ultimo sono le funzioni  $2\pi$ -periodiche continue da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{C}$ . Poniamo

$$\bar{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n.$$

Osserviamo che  $T$  è compatto perché omeomorfo a  $S^1$ . Verifichiamo le ipotesi del **Teorema di Stone-Weierstrass** per  $\bar{V}$ :

- sottoalgebra) Basta mostrare che  $\bar{V}$  è uno spazio vettoriale chiuso per prodotto. Sappiamo già che è uno spazio vettoriale. Se  $a, b \in \bar{V}$  allora esiste  $k$  tale che  $a, b \in V_k$ , dunque  $ab \in V_{2k} \subseteq \bar{V}$ .
- separa i punti)  $e^{it_1} = e^{it_2} \iff t_1 = t_2 + 2k\pi \iff t_1 = t_2$  data la relazione posta su  $T$ .
- contiene le costanti)  $c = ce^{i0t}$ .
- Chiuso per coniugio) Ovvio dalla struttura graduata di  $\bar{V}$ .

Concludiamo dunque che  $\bar{V}$  è denso in  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Osserviamo che se  $f \in C_C(I, \mathbb{C})$ ,  $\lim_{x \rightarrow \partial I} f(x) = 0$ , dunque possiamo estendere  $f$  a  $\bar{f} \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ripetendo i valori che assume in  $I$ . Allora per la densità di  $\bar{V}$  in  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  possiamo trovare  $\varphi \in \bar{V}$  tale che

$$\|\bar{f} - \varphi\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Dato che  $\|\bar{f} - \varphi\|_{\infty} \geq \|f - \varphi|_I\|_{\infty}$  per come funziona il sup, abbiamo mostrato che per ogni  $f \in C_C(I)$  esiste una funzione  $\varphi \in \bar{V}$  tale che  $\|f - \varphi\|_{\infty} < \varepsilon$ , che è la tesi. □

Grazie a questo risultato possiamo dare i risultati fondanti della teoria delle serie di Fourier.

**Teorema 4.47** (Convergenza delle proiezioni ortogonali).  
 Data  $f \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$  si ha che  $s_n f \rightarrow f$  in  $L^2_{\mathbb{C}}(I)$ .

*Dimostrazione.*

Vogliamo mostrare che  $\|f - s_n f\| \rightarrow 0$ . Consideriamo  $f \in L^2(I)$  e fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Sappiamo che le continue a supporto compatto sono dense nelle  $L^2$  (4.18)<sup>5</sup>, dunque esiste  $\varphi \in C_C(I)$  tale che

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon/2.$$

Sia ora  $p \in \overline{V}$  tale che  $\|\varphi - p\| \leq \|\varphi - p\|_{\infty} < \varepsilon/2$ , che possiamo fare per la densità di  $\overline{V}$  in  $C_C(I)$  (4.46). Data la forma di  $\overline{V}$ , esiste  $m$  tale che  $p \in V_m$ . Se  $n \geq m$  osserviamo che  $p \in V_n$ . Dunque definitivamente abbiamo

$$\|f - s_n f\| \stackrel{(4.41)}{\leq} \|f - p\| \leq \|f - \varphi\| + \|\varphi - p\| < \varepsilon.$$

□

Siamo finalmente pronti per definire le serie di Fourier:

**Definizione 4.48** (Serie di Fourier).

Se  $f \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$  abbiamo che

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k.$$

Chiamiamo il termine di destra la **serie di Fourier** relativa ad  $f$ . La buona definizione segue da (4.47).

**Teorema 4.49** (Uguaglianza di Parseval).

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2$$

*Dimostrazione.*

Ricordiamo (4.41) che

$$\|f\|^2 = \|f - s_n f\|^2 + \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}_k|^2,$$

quindi passando al limite in  $n$  abbiamo

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 + \lim_n \|f - s_n f\|^2 \stackrel{(4.47)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 + 0.$$

□

**Teorema 4.50** (Prodotto interno in termini dei coefficienti di Fourier).

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\langle s_n f, g \rangle = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \langle e_k, g \rangle = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}.$$

Ricordando che la funzione  $\begin{matrix} L^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \langle f, g \rangle \end{matrix}$  è continua (4.30) possiamo passare al limite in  $n$

$$\langle f, g \rangle \longleftarrow \langle s_n f, g \rangle = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k} \longrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k}.$$

□

<sup>5</sup>Il teorema dato vale per le funzioni reali, ma dato che  $\|f\| = \sqrt{2\pi}(\|\Re(f)\|_2 + \|\Im(f)\|_2)$  possiamo stimare separatamente parte reale e parte immaginaria per poi riunirle.

**Notazione 4.51.**

Definiamo l'insieme delle successioni dei "validi" coefficienti di Fourier

$$\ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) = \left\{ \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C} \mid \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i|^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

**Corollario 4.52.**

La funzione

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{C}}^2(I) &\longrightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

è una isometria.

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \|f - g\| &= \sqrt{\langle f, f - g \rangle - \langle g, f - g \rangle} = \sqrt{\|f\|^2 - \langle f, g \rangle - \langle g, f \rangle + \|g\|^2} \stackrel{(4.50)}{=} \\ &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 + |\hat{g}_k|^2 - \hat{f}_k \overline{\hat{g}_k} - \overline{\hat{f}_k} \hat{g}_k} = \\ &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{f}_k - \hat{g}_k) \overline{(\hat{f}_k - \hat{g}_k)}} = \\ &= \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k - \hat{g}_k|^2} = \\ &= \left\| (\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} - (\hat{g}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell_{\mathbb{C}}^2}. \end{aligned}$$

□

**4.2.3 Serie di Fourier Reale**

Osserviamo che possiamo scomporre ogni funzione con dominio reale in una parte pari ed una parte dispari:

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) + f(-t))}_{\text{pari}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(t) - f(-t))}_{\text{dispari}} \doteq f_0(t) + f_1(t).$$

Vediamo come questa decomposizione si comporta in termini della serie di Fourier per  $f$  se  $f \in L_{\mathbb{R}}^2(I)$ .

*Osservazione 4.53.*

Data  $f \in L_{\mathbb{C}}^2(I)$  si ha che

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-ikt} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \cos(kt), \\ f_1(t) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{-ikt} \right) = i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \sin(kt). \end{aligned}$$

**Proposizione 4.54** (Serie di Fourier Reale).

Se  $f \in L_{\mathbb{R}}^2(I)$  allora

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

dove  $a_k$  e  $b_k$  sono dei coefficienti che dipendono da  $f$  e  $k$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che se  $f$  ha immagine in  $\mathbb{R}$  allora

$$\hat{f}_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt} = \overline{\hat{f}_k}.$$

Segue che

$$f_0 = \hat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k}) \cos(kt), \quad f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} i(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k}) \sin(kt).$$

Definiamo allora  $a_k = \hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k}$  e  $b_k = i(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k})$ . Dato che  $\hat{f}_0 = \overline{\hat{f}_0}$  osserviamo che  $\hat{f}_0 = a_0/2$ . Segue la tesi ricordando che  $f = f_0 + f_1$  e osservando che le serie convergono in  $L^2$  per ipotesi.  $\square$

*Osservazione 4.55* (Coefficienti di Fourier reali).

Dai passaggi della dimostrazione precedente si evince che

$$a_k = \hat{f}_k + \overline{\hat{f}_k} = 2 \Re(\hat{f}_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

$$b_k = i(\hat{f}_k - \overline{\hat{f}_k}) = -2 \Im(\hat{f}_k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

*Osservazione 4.56.*

Se  $f$  è dispari  $a_k = 0$  per ogni  $k \geq 0$ , mentre se è pari avremo  $b_k = 0$  per ogni  $k \geq 1$ .

#### 4.2.4 Convergenza uniforme delle serie di Fourier

*Osservazione 4.57.*

$L^1_{\mathbb{C}}(I) \supset L^2_{\mathbb{C}}(I) \supset L^{\infty}_{\mathbb{C}}(I)$ , dove le norme sono estese componente per componente<sup>6</sup>.

*Dimostrazione.*

Sappiamo già che  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\infty}$  (4.34), quindi osservando che  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_2$  sono topologicamente equivalenti ( $\sqrt{2\pi}\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ ) abbiamo il secondo contenimento.

Se  $f \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$  allora

$$\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f| \cdot 1 dt =$$

$$= 2\pi \langle f, 1 \rangle \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2\pi \|f\| \|1\| = \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

$\square$

**Teorema 4.58** (Criterio sufficiente per convergenza uniforme di serie).

Sia  $f_k : X \rightarrow F$  una successione di funzioni con  $F$  spazio di Banach. Se esiste  $M_k$  successione di reali non negativi tale che

$$\sup_X \|f_k\|_F \leq M_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathbb{R}$$

allora la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge uniformemente.

<sup>6</sup>La norma in  $L^1_{\mathbb{C}}(I)$  è  $\int_I |f| = 2\pi \langle f, 1 \rangle$ , quella in  $L^2_{\mathbb{C}}(I)$  è  $\sqrt{\int_I |f|^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|$  e quella in  $L^{\infty}_{\mathbb{C}}(I)$  è  $\max_I |f|$ .

*Dimostrazione.*

Ponendo  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , si ha che  $S_n$  è di Cauchy, infatti fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $N$  tale che  $\sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon$ , da cui per  $n > m \geq N$  abbiamo

$$\|S_n(x) - S_m(x)\|_F = \left\| \sum_{m+1}^n f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{m+1}^n \|f_k(x)\|_F \leq \sum_{m+1}^n M_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Segue che  $S_n(x)$  è di Cauchy per ogni  $x$ , ovvero  $S_n$  converge puntualmente (dato che  $F$  è completo). Se  $S$  è la funzione tale che  $S(x) = \lim_n S_n(x)$  allora osserviamo che

$$\|S_n(x) - S(x)\|_F \leq \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_F \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k}_{\text{non dipende da } x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

**Proposizione 4.59** (Criterio per la convergenza uniforme delle serie di Fourier).

Se  $(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ <sup>7</sup> allora  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k$  è uniformemente convergente a  $f$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $|\hat{f}_k e_k| = |\hat{f}_k|$  quindi, dato che la serie  $\sum |\hat{f}_k|$  converge, per il teorema (4.58) abbiamo che  $\sum \hat{f}_k e_k$  converge uniformemente. Poiché  $L_{\mathbb{C}}^2(I) \subseteq L_C^1(I)$  (4.57), sappiamo per (4.47) che il limite è  $f$ , quindi la serie converge uniformemente a  $f$ . □

**Proposizione 4.60** (Problema di Basilea).

Vale la seguente identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo la funzione  $g(t) = |t|$  su  $I$  e calcoliamone la serie di Fourier. Essendo pari si ha immediatamente che  $b_k = 0$ . Calcoliamo gli  $a_k$ :

Se  $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

Se  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( t \frac{\sin(kt)}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( 0 - 0 + \frac{\cos(kt)}{k^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi k^2} (\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si ha dunque che

$$g(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{\cos(kt)}{k^2}.$$

Valutiamo allora  $g$  in 0:

$$0 = |0| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

<sup>7</sup>cioè la serie  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_k|$  converge

Sappiamo che  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge assolutamente, quindi le seguenti manipolazioni sono lecite

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

**Proposizione 4.61** (Criterio con  $C_{2\pi}^1$  per la convergenza uniforme delle serie di Fourier).  
 Se  $f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  allora  $(\hat{f}_k) \in \ell_c^1(\mathbb{Z})$  e vale la seguente disuguaglianza

$$\|(f^k)_{k \neq 0}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}_k| \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \|f'\|.$$

*Dimostrazione.*

Svolgiamo il seguente calcolo

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \cancel{f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_{-\pi}^{\pi}} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right) = \\ &= \frac{1}{ik} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right) = \frac{1}{ik} (\widehat{f'})_k. \end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} |\hat{f}_k| &= \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|} |(\widehat{f'})_k| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \\ &\leq \sqrt{\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2}} \sqrt{\sum_{k \neq 0} |(\widehat{f'})_k|^2} \stackrel{\text{Parseval} \pm \text{Basilea}}{=} \\ &= \sqrt{2 \frac{\pi^2}{6}} \sqrt{\|f'\|^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{3}} \|f'\|. \end{aligned}$$

□

*Osservazione 4.62.*

È effettivamente un criterio sufficiente per (4.59)

Proviamo a estendere il criterio oltre le funzioni  $C^1$ :

**Definizione 4.63** (Periodica regolare a tratti).

Una funzione  $2\pi$ -periodica è **regolare a tratti** se su ogni periodo ha un numero finito di discontinuità e fuori è  $C^1$  con derivata limitata.

**Corollario 4.64.**

*Il risultato vale anche se  $f$  è regolare a tratti.*

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità ipotizziamo ci sia un solo punto angoloso in  $a \in (-\pi, \pi)$ .

Allora come prima

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^a f(t)e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_a^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_{-\pi}^a + f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_a^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^a f'(t)e^{-ikt} dt + \frac{1}{ik} \int_a^{\pi} f'(t)e^{-ikt} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \cancel{f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \Big|_{-\pi}^a} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt} dt \right). \end{aligned}$$

Da questo punto lo stesso ragionamento ci porta al risultato cercato.  $\square$

**Proposizione 4.65** (Convergenza dei traslati).

Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  allora definiamo  $f_h(x) = f(x - h)$ . Si ha che

$$f_h \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_1 = 0$$

*Dimostrazione.*

Procediamo con un argomento per densità. Sia  $\varepsilon > 0$  fissato e scegliamo  $\varphi \in C_C(\mathbb{R}^N)$  tale che  $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon/3$  e  $\text{supp } \varphi \subset \overline{B}_R(0)$  per qualche  $R > 0$  (possiamo per la densità delle continue a supporto compatto in  $L^p$  (4.19)). Per il **Teorema di Heine-Cantor**  $\varphi$  è uniformemente continua, quindi  $\exists \delta > 0$  tale che  $|x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon/(3M)$  con  $M = |\overline{B}_{R+1}(0)|$ .

Osserviamo quindi che se  $|h| < \min(\delta, 1)$  (prendiamo quel minimo perché vogliamo che il supporto di  $\varphi_h$  rimanga entro  $\overline{B}_{R+1}(0)$ ) allora

$$|\varphi(x) - \varphi_h(x)| < \frac{\varepsilon}{3M} \implies \|\varphi - \varphi_h\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{3M} \implies \|\varphi - \varphi_h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Osserviamo inoltre che  $\|f - \varphi\|_1 = \|f_h - \varphi_h\|_1$  dato che la traslazione di entrambe non ha effetto sull'integrale che definisce  $\|\cdot\|_1$ . Abbiamo quindi

$$\|f - f_h\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - \varphi_h\|_1 + \|\varphi_h - f_h\|_1 < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$\square$

*Osservazione 4.66.*

Per  $p \neq \infty$ , se  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  allora definiamo  $f_h(x) = f(x - h)$ . Si ha che

$$f_h \in L^p(\mathbb{R}^N) \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|f - f_h\|_p = 0$$

*Dimostrazione.*

Non abbiamo usato alcuna proprietà particolare della norma 1 se non il fatto che  $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{\infty}$ , ma questo vale sostituendo 1 con un qualsiasi  $p$  ( $p \neq \infty$  perché abbiamo usato la densità delle continue a supporto compatto).  $\square$

**Lemma 4.67** (Riemann-Lebesgue).

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t} dt = 0.$$

*Dimostrazione.*

Data l'invarianza per traslazione dell'integrale di Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t-h)e^{i\lambda(t-h)} dt.$$

Scriviamo allora

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t} dt &= \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t} dt + \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{i\lambda\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right)} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right) e^{i\lambda t} dt.\end{aligned}$$

Passando dunque al modulo

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| f(t) - f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) \right| dt = \frac{1}{2} \|f - f_{\pi/\lambda}\|_1 \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{(4.65)} 0.$$

□

**Definizione 4.68** (Nucleo di Dirichlet).

Definiamo l' $n$ -esimo **nucleo di Dirichlet** come la seguente somma

$$D_n(t) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}.$$

**Lemma 4.69.**

Per  $t \neq 0$  vale la seguente identità

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$e^{int} D_n(t) = \sum_{|k| \leq n} e^{i(k+n)t} = \sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(2n+\frac{1}{2})t} - e^{-it/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}},$$

da cui

$$D_n(t) = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

□

*Osservazione 4.70* (Proprietà dei nuclei di Dirichlet).

I nuclei di Dirichlet sono funzioni pari e  $D_n(0) = 2n + 1$ . Inoltre

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi + \frac{1}{ik} \sum_{0 < |k| \leq n} \underbrace{e^{\pi ki} - e^{-\pi ki}}_{=2i \sin(\pi k)=0} \right) = 1.$$

*Osservazione 4.71* (Proiezioni ortogonali in termini dei nuclei di Dirichlet).

Possiamo scrivere le proiezioni ortogonali in termini dei nuclei di Dirichlet come segue:

$$\begin{aligned}s_n f(x) &= \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k(x) = \sum_{|k| \leq n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt.\end{aligned}$$

**Teorema 4.72** (Serie di Fourier nei punti di discontinuità).

Se  $f$  è regolare a tratti allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n f(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-)),$$

dove come notazione poniamo  $f(x^+) = \lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi)$  e similmente per  $f(x^-)$ .

*Dimostrazione.*

Calcoliamo la proiezione ortogonale

$$\begin{aligned}
 s_n f(x) &\stackrel{(4.71)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_n(-t) dt \stackrel{\text{parità di } D_n}{=} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_n(t) dt \stackrel{f \text{ è } 2\pi\text{-periodica}}{=} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt}_{\rightarrow f(x^-)?} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt}_{\rightarrow f(x^+)?} \right).
 \end{aligned}$$

Verifichiamo che il secondo addendo tende a  $f(x^+)$ , l'altro risultato si ottiene in modo del tutto analogo:

$$\begin{aligned}
 f(x^+) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt &\stackrel{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1}{=} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x^+) D_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x^+) - f(x+t)) D_n(t) dt \stackrel{(4.69)}{=} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(x^+) - f(x+t)}{t}}_{\doteq g_x(t)} \frac{t}{\sin(t/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = \\
 &= \Im \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) e^{i(n+\frac{1}{2})t} dt \right) \stackrel{\text{Riemann-Lebesgue}}{n \rightarrow +\infty} \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue se  $g_x \in L^1$ . Per ipotesi  $f \in C^1$ , quindi  $g_x$  è  $C^1$  su  $(0, \pi)$ . In particolare  $\sup_{(0, \pi)} |f'| = M$  è ben definito. Per concludere che  $g_x \in L^1$  basta osservare che  $|g_x| \leq 2M$ :

$$\frac{f(x^+) - f(x+t)}{t} = f'(\xi) \text{ per } \xi \in (x, x+t), \quad \frac{t}{\sin(t/2)} \leq \pi \quad \forall t \in (0, \pi).$$

□

#### 4.2.5 Serie di Fourier su più dimensioni

Sia  $Q = [0, 1)^N \subseteq \mathbb{R}^N$ . Definiamo come per il caso dell'intervallo il seguente prodotto scalare su  $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$

$$\langle f, g \rangle = \int_Q f(x) \overline{g(x)} dx$$

e come notazione scriviamo per  $k \in \mathbb{Z}^N$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$

$$e_k(x) = e^{2\pi i k \cdot x}$$

dove  $k \cdot x = \sum_{i=1}^N k_i x_i$  è il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^N$ .

#### Proposizione 4.73.

Gli  $e_k$  sono un sistema ortonormale al variare di  $k \in \mathbb{Z}^N$ .

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_h \rangle &= \int_Q e^{2\pi i k \cdot x} e^{-2\pi i h \cdot x} dx = \int_Q e^{2\pi i (k-h) \cdot x} dx = \\ &= \int_Q \prod_{j=1}^N e^{2\pi i (k_j - h_j) x_j} dx \stackrel{\text{F.T.}}{=} \\ &= \prod_{j=1}^N \int_0^1 e^{2\pi i (k_j - h_j) x_j} dx_j = \\ &= \prod_{j=1}^N \delta_{k_j, h_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = h \\ 0 & \text{se } k \neq h \end{cases} \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio deriva dallo studio nel caso unidimensionale.  $\square$

**Notazione 4.74** (Coefficienti di Fourier e Proiezione ortogonale).

In analogia al caso unidimensionale, dati  $f \in L^2_{\mathbb{C}}(Q)$  e  $k \in \mathbb{Z}^N$  poniamo

$$\hat{f}_k = \langle f, e_k \rangle, \quad s_n f = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_k e_k,$$

dove  $|k| = \sum_{j=1}^N |k_j|$  come di consueto.

**Teorema 4.75** (Le proiezioni ortogonali convergono in  $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$ ).

La successione  $s_n f$  converge a  $f$  in  $L^2_{\mathbb{C}}(Q)$  e  $\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} |\hat{f}_k|^2$ .

*Dimostrazione.*

Segue come nel caso di una dimensione a patto di verificare la completezza di  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}^N}$ , ovvero che

$$\bigcup_{n \geq 0} \overline{\text{Span}(\{e_k\}_{|k| \leq n})} = L^2_{\mathbb{C}}(Q).$$

La dimostrazione di questo fatto non è stata data e pertanto noi la omettiamo.  $\square$

### 4.3 Convolutioni

**Definizione 4.76** (Convolutione).

Siano  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . Definiamo

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.$$

La funzione  $f * g$  è detta  $f$  **convoluta**  $g$  o **la convolutione di  $f$  e  $g$** .

*Osservazione 4.77.*

La mappa

$$\phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x-y)g(y) \end{array}$$

è integrabile. In particolare  $f * g$  è ben definita quasi ovunque.

*Dimostrazione.*

Sia  $\phi(x, y) = f(x-y)g(y)$ , la quale è una funzione misurabile in quanto composizione e prodotto di misurabili (3.55). Osserviamo inoltre che per ogni  $y \in \mathbb{R}^N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x, y)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx = |g(y)| \|f\|_1,$$

dunque

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\phi(x, y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_1 |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

Allora  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$  per il criterio (3.96), quindi l'integrale che definisce  $f * g$  è definito quasi ovunque.  $\square$

**Teorema 4.78** (Norma-p della convoluzione).

Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  allora  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

*Dimostrazione.*

Fissiamo  $\phi(x, y) = f(x - y)g(y)$ . Consideriamo prima il caso di  $p = 1$  e poi il caso generale:

$p = 1$  Poiché  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$  si ha per il **Teorema di Fubini-Tonelli** che per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  è definita la mappa

$$f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dy \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue che

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)| dx = \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |\phi(x, y)| dy dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

$p > 1$  Sia  $h(x) = (|f| * |g|^p)(x)$ . Poiché  $|g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$  abbiamo che  $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$  per (4.77), da cui  $\|h\|_1 = \|f\|_1 \|g^p\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_p^p$  per il caso precedente. Se  $q$  è quel numero tale che  $1/q + 1/p = 1$  osserviamo che

$$|f(x - y)g(y)| = \underbrace{|f(x - y)|^{\frac{1}{q}}}_{\in L^q} \underbrace{|f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|}_{\in L^p},$$

dove la seconda appartenenza deriva dal fatto che  $(|f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|)^p = |f(x - y)| |g(y)|^p$  è l'integrando di  $h$ .

Calcoliamo  $|(f * g)(x)|$ :

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x - y)g(y)| dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \\ &\leq \|f\|_q^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \left| |f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f\|_q^{\frac{1}{q}} \|h\|_1^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |f * g|^p(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|f\|_q^{p/q} h(x) dx = \\ &= \|f\|_q^{p/q} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) dx = \\ &= \|f\|_q^{p/q} \|f\|_1 \|g^p\|_1 = \\ &= \|f\|_q^p \|g\|_p^p, \end{aligned}$$

da cui elevando a  $1/p$  ricaviamo la disuguaglianza

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_q \|g\|_p$$

come voluto.  $\square$

*Osservazione 4.79.*

$$f * g = g * f$$

*Dimostrazione.*

Si tratta di un semplice cambio di variabili

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \stackrel{w=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f(w)g(x-w) \cdot \underbrace{|-1|}_{\text{Jacob.}} dw = (g * f)(x).$$

□

**Proposizione 4.80** (Convoluzione di Continua a supporto compatto e integrabile è continua).

Siano  $f \in C_C(\mathbb{R}^N)$  continua a supporto compatto e  $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ , allora  $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$ .

*Dimostrazione.*

Essendo  $f$  continua a supporto compatto essa è uniformemente continua per il **Teorema di Heine-Cantor**, dunque per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ . Dimostriamo che  $f * g$  è uniformemente continua, da cui seguirà la tesi:

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(x')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x-y) - f(x'-y))g(y)dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x'-y)| |g(y)|dy \stackrel{|x-y-(x'-y)|=|x-x'|<\delta}{\leq} \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|dy = \varepsilon \|g\|_1. \end{aligned}$$

Essendo  $g \in L^1$  sappiamo che  $\|g\|_1$  è un valore finito e quindi per avere l'uniforme continuità di  $f * g$  basta scegliere il  $\delta$  di  $f$  corrispondente a  $\varepsilon/\|g\|_1$ . □

*Osservazione 4.81.*

A patto di restringerci ad un intorno di  $x$ , la dimostrazione sopra funziona anche per  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ . Chiaramente in questo caso la continuità uniforme di  $f * g$  non è garantita dato che l'equivalente di  $\|g\|_1$  potrebbe variare cambiando intorno.

**Proposizione 4.82** (Convoluzione di  $C^1$  a supp.cpt. e integrabile è  $C^1$ ).

Se  $f \in C^1_C(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$  allora  $f * g \in C^1(\mathbb{R}^N)$  e

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

*Dimostrazione.*

Essendo  $f \in C^1_C(\mathbb{R}^N)$  abbiamo che  $f$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  sono continue a supporto compatto, dunque  $f * g$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i} * g$  sono continue su  $\mathbb{R}^N$  per la proposizione precedente (4.80).

Per il teorema di **Differenziabilità totale**, per dimostrare la tesi basta dimostrare il secondo punto. Infatti se questo vale, per quanto appena detto, avremo che le derivate parziali di  $f * g$  sono continue. Per avere la tesi dunque basta mostrare che la quantità

$$R(h) = \left| (f * g)(x + he_i) - (f * g)(x) - h \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} * g \right)(x) \right|$$

è un o-piccolo di  $h$  per  $h \rightarrow 0$ .  
Sviluppiamo  $R(h)$ :

$$\begin{aligned}
R(h) &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( f(x + he_i - y) - f(x - y) - h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right) g(y) dy \right| = \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left( h \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + the_i - y) dt - h \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right) g(y) dy \right| \leq \\
&\leq |h| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + the_i - y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x - y) \right| dt |g(y)| dy \leq \\
&\leq |h| \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \omega(|ht|) dt |g(y)| dy \stackrel{\omega \text{ monotona positiva}}{\leq} \\
&\leq |h| (|\omega(|h|) - \omega(0)| \cdot |1 - 0|) \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| dy = \\
&= |h| \omega(|h|) \|g\|_1 = o(h)
\end{aligned}$$

dove  $\omega(t)$  è il modulo di continuità di  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , che è uniformemente continua in quanto continua a supporto compatto.  $\square$

### 4.3.1 Mollificatori

**Definizione 4.83** (Mollificatore).

Una funzione  $\rho$  è detta **mollificatore** se

- $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$
- $\rho \geq 0$
- esiste  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tale che  $\text{supp}(\rho) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(0)$
- $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$ .

Sia  $\rho = \rho_1$  un mollificatore tale che  $\text{supp}(\rho) \subseteq B_1(0)$ . Definiamo la seguente successione di mollificatori

$$\rho_n(x) = \rho(nx) n^{\frac{1}{N}}.$$

*Osservazione 4.84.*

La funzione  $\rho_n$  è effettivamente un mollificatore.

*Dimostrazione.*

Le prime due proprietà derivano da quelle di  $\rho$ , il supporto di  $\rho_n$  è il supporto di  $\rho$  scalato di un fattore  $1/n$ , in particolare  $\text{supp}(\rho_n) \subseteq B_{\frac{1}{n}}(0)$  e infine

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \rho(nx) n^{1/N} dx \stackrel{y=nx}{=} \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) n^{1/N} \left| \frac{1}{n^{1/N}} \right| dy = 1.$$

$\square$

**Proposizione 4.85** (Approssimazione di  $L^1$  con mollificatori).

Sia  $f \in L^1$  e consideriamo la successione data da  $\rho_n * f$ . Si ha che  $\rho_n * f \in L^1 \cap C^\infty$  e  $\rho_n * f \rightarrow f$  in  $L^1$ .

*Dimostrazione.*

Essendo  $\rho_n \in C_c^\infty$  e  $f \in L^1$  troviamo da quanto già detto (4.78) che  $\rho_n * f \in L^1$ . Il fatto che sia  $C^\infty$  deriva dal fatto che

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} (\rho_n * f) = \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}} \rho_n \right) * f,$$

che vale applicando ripetutamente (4.82) e (4.78) alternando.

Verifichiamo ora la convergenza. Mostriamo cioè che la seguente famiglia di integrali va a zero in  $n$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n * f - f| dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y) dy - f(x) \right| dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y) - \rho_n(x-y) f(x) dy \right| dx \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) |f(y) - f(x)| dy dx \stackrel{x-y=w}{=} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(w) |f(x-w) - f(x)| dw dx \stackrel{\text{supp}(\rho_n) \subseteq B_{1/n}(0)}{=} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{|w| \leq 1/n} \rho_n(w) |f(x-w) - f(x)| dw dx \stackrel{\text{F.T.}}{=} \\
&= \int_{|w| \leq 1/n} \rho_n(w) \|f - f_w\|_1 dw.
\end{aligned}$$

Ricordiamo (4.65) che  $\|f - f_w\|_1 \rightarrow 0$  per  $w \rightarrow 0$ , quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che se  $|w| < 1/n_0$  si ha  $\|f - f_w\|_1 < \varepsilon$ . Quindi se  $n \geq n_0$  si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n * f - f| dx \leq \int_{|w| \leq 1/n} \rho_n(w) \|f - f_w\|_1 dw \leq \int_{|w| \leq 1/n} \rho_n(w) \varepsilon dw = \varepsilon,$$

da cui la tesi.  $\square$

## 4.4 Nozioni pratiche varie sugli integrali

**Proposizione 4.86** (Integrale di Gauss).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

*Dimostrazione.*

Consideriamo dapprima l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Passando alle coordinate polari

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \\
&= -\pi \int_0^{\infty} -2\rho e^{-\rho^2} d\rho = \\
&= -\pi e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} = -\pi(0-1) = \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Osserviamo però che per il **Teorema di Fubini-Tonelli**

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2,$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

**Proposizione 4.87** (Integrale con forma quadratica def.pos. all'esponente).

Sia  $A \in S(N, \mathbb{R})$  una matrice simmetrica definita positiva, allora se  $\phi_A(x) = x^\top Ax$  è la forma quadratica indotta da  $A$  si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}\phi_A(x)} dx = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}}.$$

*Dimostrazione.*

Sia  $M$  una matrice ortogonale che diagonalizza  $A^8$ , cioè  $M^{-1}AM = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = D$  e  $M^\top = M^{-1}$ . In particolare  $M$  è invertibile, sia quindi  $y = M^{-1}x$ . Vediamo che

$$\phi_A(x) = x^\top Ax = (My)^\top A(My) = y^\top (M^\top AM)y = y^\top Dy = \sum_{i=1}^N \lambda_i y_i^2.$$

Osserviamo che lo Jacobiano del cambio di variabili da  $x$  a  $y = M^{-1}x$  è  $|\det M^{-1}|^{-1} = |\det M| = 1$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}\phi_A(x)} dx &\stackrel{y=M^{-1}x}{=} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{1}{2}\sum \lambda_i y_i^2} \cdot 1 dy = \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2} dy \stackrel{\text{F.T.}}{=} \\ &= \prod_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda_i}{2} y_i^2} dy_i \stackrel{t_i = (\sqrt{\lambda_i/2}) y_i}{=} \\ &= \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t_i^2} dt_i = \prod_{i=1}^N \sqrt{\frac{2}{\lambda_i}} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\prod_{i=1}^N \lambda_i}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det A}}. \end{aligned}$$

□

**Proposizione 4.88** (Disuguaglianza di Wirtinger).

Sia  $I = [a, b]$  e sia  $u \in C^1(I)$  tale che  $u(a) = u(b) = 0$ . Allora si ha che

1. Esiste  $c > 0$  tale che  $\int_a^b |u(t)|^2 dt \leq c^2 \int_a^b |u'(t)|^2 dt$
2.  $c = (b-a)/\pi$  è la scelta ottimale, ovvero è la minima scelta affinché la disuguaglianza continui a valere.

*Dimostrazione.*

Osserviamo in via preliminare che

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^{b-a} f(t+a) dt = \int_0^\pi \frac{\pi}{b-a} f\left(\frac{b-a}{\pi}t - a\right) dt,$$

quindi supponendo che la tesi valga per  $I = [0, \pi]$  si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(t)|^2 dt &= \frac{\pi}{b-a} \int_0^\pi \left| u\left(\frac{b-a}{\pi}t - a\right) \right|^2 dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{b-a} \int_0^\pi \left| \frac{b-a}{\pi} u'\left(\frac{b-a}{\pi}t - a\right) \right|^2 dt = \\ &= \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \frac{\pi}{b-a} \int_0^\pi \left| u'\left(\frac{b-a}{\pi}t - a\right) \right|^2 dt = \\ &= \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |u'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Vedi Teorema Spettrale

e questa per ipotesi continua ad essere una maggiorazione ottimale. Supponiamo dunque  $I = [0, \pi]$  e quindi vogliamo mostrare che per  $c = 1$  abbiamo la maggiorazione e questa è ottimale.

Estendiamo  $u$  a  $[-\pi, \pi]$  in modo dispari:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -u(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Osserviamo che  $\tilde{u} \in C^1([-\pi, \pi])$  e dato che  $0 = \tilde{u}(0) = \tilde{u}(\pi) = \tilde{u}(-\pi)$  con derivate direzionali compatibili possiamo estendere  $\tilde{u}$  ad una funzione  $2\pi$ -periodica su  $\mathbb{R}$  di classe  $C^1$ . Possiamo quindi usare i risultati sulle serie di Fourier (4.54):

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt), & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}|^2 dt &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}' &= \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos(kt), & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}'|^2 dt &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Osserviamo allora che

$$\int_0^{\pi} |u|^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}|^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \stackrel{b_k^2 \leq k^2 b_k^2}{\leq} \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{u}'|^2 dt = \int_0^{\pi} |u'|^2 dt.$$

Vediamo infine che nel caso  $b_k = 0$  per ogni  $k \neq 1$  e  $b_1 = 1$  (cioè nel caso  $\tilde{u}(t) = \sin(t)$ ) abbiamo una uguaglianza tra i due membri, quindi abbiamo una disuguaglianza ottimale.  $\square$

**Teorema 4.89** (Integrali radiali).

Data  $\varphi \in L^1([0, +\infty))$  si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|) dx = \int_0^{\infty} \varphi(t) n \omega_n t^{n-1} dt,$$

dove  $\omega_n = |B_1(0)| = \mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\})$ , cioè il volume della palla di raggio 1 in  $n$  dimensioni.

*Dimostrazione.*

Con un semplice cambio di variabili si vede che  $|B_r(0)| = r^n \omega_n$ . Verifichiamo che la tesi vale per  $\varphi = \chi_{[a,b]}$  funzione caratteristica dell'intervallo  $[a, b] \subseteq [0, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[a,b]}(|x|) dx &= \int_{a \leq |x| \leq b} dx = |B_b(0) \setminus B_a(0)| = (b^n - a^n) \omega_n = \\ &= \int_a^b \omega_n n t^{n-1} dt \stackrel{[a,b] \subseteq [0, +\infty)}{=} \\ &= \int_0^{\infty} \chi_{[a,b]}(t) n \omega_n t^{n-1} dt. \end{aligned}$$

Per la linearità dell'integrale abbiamo che la tesi vale anche per le funzioni semplici e passando all'estremo superiore raggiungiamo ogni funzione misurabile non negativa per **Convergenza monotona / Beppo-Levi**. Applicando nuovamente la linearità dell'integrale troviamo la tesi per  $\varphi \in L^1$  come voluto.  $\square$

**Corollario 4.90** (Misura palla).

$$\omega_n = |B_1(0)| = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}$$

dove  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  è la funzione  $\Gamma$  di Eulero.

*Dimostrazione.*

Consideriamo la funzione  $\varphi(t) = e^{-t^2}$ . Osserviamo che

$$-|x|^2 = -\frac{1}{2}x^\top(2I_n)x,$$

dove  $I_n$  è la matrice identità di taglia  $n$ . Poiché  $2I_n$  è simmetrica definita positiva possiamo applicare (4.87) e trovare

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(2I_n)}} = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{2^n}}\pi^{n/2} = \pi^{n/2}.$$

Applicando il teorema sopra (4.89) però si ha che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} n\omega_n t^{n-1} dt = \frac{n}{2}\omega_n \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{n-2} 2t dt \stackrel{s=t^2}{=} \\ &= \frac{n}{2}\omega_n \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{(n/2)-1} ds = \frac{n}{2}\omega_n \Gamma(n/2).\end{aligned}$$

Quindi

$$\pi^{n/2} = \omega_n \Gamma(n/2) \frac{n}{2},$$

da cui la tesi. □

*Osservazione 4.91.*

Quando introdurremo le misure di Hausdorff vedremo che la quantità  $n\omega_n r^{n-1}$  corrisponde alla misura  $n-1$  dimensionale di  $\partial B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$ .

## Capitolo 5

# Integrazione su k-Superfici e Forme

### 5.1 Curve su spazi reali

**Definizione 5.1** (Curva in  $\mathbb{R}^n$ ).

Una **curva** è una funzione  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. L'immagine  $\gamma([a, b])$  è detto il **supporto** di  $\gamma$ . Si dice che una curva  $\gamma$  è

- **chiusa** se  $\gamma(a) = \gamma(b)$
- **regolare** se  $\gamma \in C^1$  e  $\gamma'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in [a, b]$
- **regolare a tratti** se esistono  $t_1 < \dots < t_N \in [a, b]$  tali che  $t_1 = a, t_N = b$  e per ogni  $i \in \{1, \dots, N-1\}$

$\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  è regolare.

*Osservazione 5.2.*

Se  $\gamma$  è regolare allora è localmente grafico di una funzione  $C^1$ , cioè, a meno di rotazione e traslazione, per ogni  $\bar{t} \in [a, b]$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\forall t \in [\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon], \quad \gamma(t) = (t, u(t)) \quad \text{con } u \in C^1([\bar{t} - \varepsilon, \bar{t} + \varepsilon], \mathbb{R}^{n-1}).$$

**Definizione 5.3** (Vettore tangente).

Il vettore

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \in S^{n-1}$$

è detto **vettore tangente** alla curva  $\gamma$  in  $t$ . La retta

$$r(t) = \{\gamma(t) + \lambda\gamma'(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

è detta **retta tangente** a  $\gamma$  in  $t$ .

**Definizione 5.4** (Vettore curvatura).

Il vettore

$$\vec{\kappa}(t) = \frac{T(t)'}{|\gamma'(t)|} = \frac{\gamma''(t) - \langle \gamma''(t), T(t) \rangle T(t)}{|\gamma'(t)|^2}$$

è detto **vettore curvatura** di  $\gamma$  in  $t$ . Il suo modulo  $\kappa(t)$  è detto **curvatura scalare** di  $\gamma$  in  $t$ .

*Osservazione 5.5.*

Dato che  $T(t) \in S^{n-1}$  si ha che  $\langle T(t), T(t) \rangle = 1$ , in particolare è costante. Osserviamo dunque che

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle T(t), T(t) \rangle = 2 \langle T'(t), T(t) \rangle,$$

dove la seconda uguaglianza si ricava applicando la definizione di derivata. Dato che  $\vec{\kappa}(t)$  e  $T'(t)$  sono proporzionali abbiamo mostrato che

$$\vec{\kappa}(t) \perp T(t).$$

**Definizione 5.6** (Vettore normale).

Se  $n = 2$  allora definiamo il **vettore normale** alla curva  $\gamma$  in  $t$  come

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T(t),$$

cioè la rotazione di  $-\pi/2$  del vettore tangente.

*Osservazione 5.7.*

Se  $n = 2$  allora  $\vec{\kappa}(t) = \kappa(t)N(t)$  (a meno di questioni di segno).

Se  $n > 2$  in generale sappiamo che  $\vec{\kappa}(t) \in T(t)^\perp$ . Possiamo definire il vettore normale generale come

$$N(t) = \frac{\vec{\kappa}(t)}{|\vec{\kappa}(t)|} \in S^{n-1},$$

da cui la scrittura

$$\vec{\kappa}(t) = \kappa(t)N(t) \quad \text{con } \kappa(t) > 0.$$

**Definizione 5.8** (Curva biregolare).

Una curva  $\gamma$  è **biregolare** se è regolare e  $\vec{\kappa}(t) \neq 0$  per ogni  $t$ .

*Osservazione 5.9.*

In  $\mathbb{R}^2$  questa condizione è molto restrittiva, ma per spazi di dimensione più alta diventa una condizione ragionevole.

**Definizione 5.10** (Cerchio osculatore).

Il **cerchio osculatore** della curva  $\gamma$  in  $t$  è il cerchio che meglio approssima  $\gamma$  vicino a  $\gamma(t)$ , cioè che passa per  $\gamma(t)$ , ha la stessa tangente e la stessa curvatura.

*Osservazione 5.11.*

La quantità

$$\frac{1}{|\kappa(t)|}$$

coincide con il raggio del cerchio osculatore in  $t$ .

### 5.1.1 Riparametrizzazioni

**Definizione 5.12** (Riparametrizzazione).

Siano  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  due curve e definiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists \psi : I_1 \rightarrow I_2 \text{ continua, bigettiva e monotona t.c. } \gamma_1 = \gamma_2 \circ \psi.$$

In questo caso affermiamo che  $\psi$  è una **riparametrizzazione** delle curve. <sup>1</sup>

*Osservazione 5.13.*

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono come sopra allora hanno lo stesso supporto.

*Osservazione 5.14.*

Se  $\psi$  riparametrizzazione è crescente allora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno lo stesso verso, altrimenti vanno in verso opposto.

<sup>1</sup>In realtà si parla di riparametrizzazione anche quando  $\psi$  non è monotona. Si richiede però che gli estremi dell'intervallo rimangano estremi (possibilmente scambiandoli), cioè  $\psi(\inf I_1) = \inf I_2$  e  $\psi(\sup I_1) = \sup I_2$  oppure  $\psi(\inf I_1) = \sup I_2$  e  $\psi(\sup I_1) = \inf I_2$ .

*Osservazione 5.15.*

A meno del segno,  $T(t)$  e  $\vec{\kappa}(t)$  non dipendono dalla parametrizzazione.

*Dimostrazione.*

Si ha che

$$T_1(t) = \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma_1'(t)|} = \frac{\gamma_2'(\psi(t))\psi'(t)}{|\gamma_2'(\psi(t))||\psi'(t)|} = \pm T_2(\psi(t))$$

e similmente per  $\vec{\kappa}(t)$ . □

## 5.1.2 Giunzione di curve, omotopia e gruppo fondamentale

**Definizione 5.16** (Giunzione di curve).

Dato due curve  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$  definiamo la loro **giunzione** come la curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  data da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**Notazione 5.17.**

Data una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiamo  $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  come

$$\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t).$$

Dato che  $(1 - t) \in C([0, 1], [0, 1])$  è una funzione decrescente abbiamo che il supporto di  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  coincide, ma vengono percorse in versi opposti.

**Definizione 5.18** (Omotopia a estremi fissati).

Date due curve  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$  e  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$  affermiamo che sono **omotope a estremi fissati** in  $A$  se esiste

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow A$$

continua tale che per ogni  $t, s \in [0, 1]$

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad H(0, s) = a, \quad H(1, s) = b.$$

La mappa  $H$  è detta **omotopia** (a estremi fissati) tra  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

Se  $\gamma_0$  è omotopa a  $\gamma_1$  scriviamo  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ <sup>2</sup>

Dato che l'omotopia in senso generale tra cammini restituisce equivalenze poco interessanti, quando affermeremo che due cammini sono omotopi *intenderemo sempre omotopi a estremi fissi* se non altrimenti specificato.

*Osservazione 5.19.*

Posso sempre supporre che  $H$  abbia la stessa regolarità di  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ .

*Dimostrazione (Intuizione).*

IDEA: Data una omotopia, se si presentano degli angoli strani, dato che siamo in un aperto, possiamo modificarla leggermente per regolarizzare quei tratti. □

**Definizione 5.20** (Semplice connessione).

Un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **semplicemente connesso** se ogni curva chiusa  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  con  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in A$  è omotopa con estremi fissi alla curva costante  $x_0(t) = x_0$ .

<sup>2</sup>Se si presenterà ambiguità rispetto a quale relazione di equivalenza è attualmente in esame scriveremo  $\gamma_0 \simeq \gamma_1$  per la relazione di equivalenza omotopica.

*Osservazione 5.21* (Semplicemente connessi nel piano).

Un aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  è semplicemente connesso se e solo se per ogni curva semplice (iniettiva) chiusa  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  abbiamo

$$A \supseteq \text{int}(\gamma),$$

dove  $\text{int}(\gamma)$  è la componente connessa limitata di  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Imm } \gamma$ .<sup>3</sup>

Intuitivamente  $A$  è semplicemente connesso se non ha “buchi”.

**Definizione 5.22** (Gruppo fondamentale).

Sia  $x_0 \in A$  e consideriamo l'insieme

$$C_{x_0} = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow A \text{ curva} \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Se  $\sim$  è la relazione “essere omotope a estremi fissati in  $A$ ” poniamo

$$\pi_1(A, x_0) = C_{x_0}/\sim.$$

Osserviamo che  $C_{x_0}$  è chiuso sotto l'operazione di giunzione e che questa passa bene alle classi.

L'insieme  $\pi_1(A, x_0)$  dotato dell'operazione indotta dalla giunzione è detto **gruppo fondamentale** di  $A$  (relativo a  $x_0$ ).<sup>4</sup>

*Osservazione 5.23.*

La scelta di  $x_0$  fissa solo la componente connessa per archi che stiamo studiando, cioè variare  $x_0$  nella stessa componente connessa lascia  $\pi_1(X, x_0)$  invariato a meno di isomorfismo. Se supponiamo  $A$  connesso per archi allora ha senso scrivere  $\pi_1(A)$  se ci interessa solo la struttura astratta di  $\pi_1(A)$ .

*Osservazione 5.24.*

$A$  è semplicemente connesso se e solo se  $\pi_1(A) = \{0\}$ .

### 5.1.3 Lunghezza di una curva

Ricordiamo la seguente

**Definizione 5.25** (Partizione di un intervallo).

Dato un intervallo  $[a, b]$ , una sua **partizione**  $\pi = \{t_0, \dots, t_N\}$  è un insieme finito di punti dell'intervallo tale che  $t_0 = a$ ,  $t_N = b$  e  $t_i < t_{i+1}$  per ogni  $i$ .

**Definizione 5.26** (Lunghezza di una curva).

Definiamo la **lunghezza** di una curva  $\gamma$  come

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \right\} \in [0, +\infty],$$

dove l'estremo superiore si considera rispetto alle possibili partizioni  $\pi = \{t_0, \dots, t_N\}$  di  $[a, b]$ .

Una curva  $\gamma$  è **rettificabile** se  $L(\gamma) \in \mathbb{R}$ .

*Osservazione 5.27.*

$L(\gamma)$  non dipende dalla parametrizzazione della curva, infatti cambiare parametrizzazione ha come effetto spostare i punti della partizione, ma dato che facciamo il sup su tutte le partizioni questo è ininfluente.

**Teorema 5.28** (Le curve  $C^1$  sono rettificabili).

Data  $\gamma \in C^1$  essa è rettificabile e  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(x)| dx$ .

<sup>3</sup>Ad essere pignoli dovremmo prima dimostrare il teorema delle curve di Jordan.

<sup>4</sup>Buona definizione e altre questioni sono delegate al corso di Geometria 2.

*Dimostrazione.*

Mostriamo la doppia disuguaglianza:

≤) Fissiamo  $\pi$  suddivisione di  $[a, b]$ . Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(t)| dt.$$

Sommando al variare di  $i$  abbiamo

$$\sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt,$$

ma dato che  $\pi$  è arbitraria vediamo che

$$L(\gamma) = \sup_{\pi} \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

≥) Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Essendo  $\gamma \in C^1([a, b])$ , abbiamo che  $\gamma'$  è continua su  $[a, b]$  e quindi per Heine-Cantor anche uniformemente continua. Allora  $\exists \delta$  t.c.  $|x - y| < \delta \implies |\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon$ . Consideriamo quindi  $\pi_\varepsilon$  tale che  $\max\{t_{i+1} - t_i\} < \delta$ , in modo tale che

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \varepsilon \quad \forall s, t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Abbiamo dunque che

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s)) dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1})$$

per ogni  $s \in [t_{i-1}, t_i]$ . Spostando i termini e passando ai moduli

$$\begin{aligned} |\gamma'(s)|(t_i - t_{i-1}) &= \left| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s)) dt \right| \leq \\ &\leq |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Segue che

$$|\gamma'(s)| \leq \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} + \varepsilon.$$

Integriamo in  $s \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)| ds \leq |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Sommiamo ora sulle  $i$ :

$$\int_a^b |\gamma'(s)| ds \leq \sum_i |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| + \varepsilon(b - a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b - a).$$

Ma  $\varepsilon$  è arbitrario, quindi abbiamo  $\int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq L(\gamma)$ . □

*Osservazione 5.29.*

Il risultato è vero anche nel caso di curve lipschitziane.

*Osservazione 5.30.*

$L(\gamma)$  NON misura la “lunghezza del supporto”. Se  $\gamma$  non è iniettiva allora  $L(\gamma)$  restituisce una misura “con molteplicità”.

*Osservazione 5.31.*

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una curva e  $a < c < b$  allora, ponendo  $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$  e  $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ , si ha che

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

**Esempio 5.32.**

Nel caso  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\gamma(t) = (t, f(t))$  per qualche  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile abbiamo

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{1^2 + (f'(t))^2} dt.$$

**Esempio 5.33.**

Data  $\rho(\theta) : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow [0, +\infty)$  continua consideriamo la curva

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta).$$

Se  $\rho \in C^1$  abbiamo  $\gamma \in C^1$ , da cui

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} |\gamma'(\theta)| d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho'(\theta) \cos \theta - \rho(\theta) \sin \theta)^2 + (\rho'(\theta) \sin \theta + \rho(\theta) \cos \theta)^2} d\theta = \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

**Definizione 5.34** (Parametrizzazione di una curva per lunghezza d'arco).

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva e consideriamo la funzione

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(t)| dt.$$

Osserviamo che  $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$  è una funzione strettamente crescente (e quindi invertibile). Definiamo la parametrizzazione di  $\gamma$  **per lunghezza d'arco** come

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1} : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

*Osservazione 5.35* (Proprietà fondamentale delle parametrizzazioni per lunghezza d'arco).

Se  $\tilde{\gamma}$  è la parametrizzazione per lunghezza d'arco di  $\gamma$  allora  $|\tilde{\gamma}'(t)| = 1$  per ogni  $t \in [0, L(\gamma)]$ .

*Dimostrazione.*

Calcoliamo

$$|\tilde{\gamma}'(t)| = \left| \gamma'(s^{-1}(t)) \frac{1}{|\gamma'(s^{-1}(t))|} \right| = 1.$$

□

## 5.2 Integrazione lungo curve

**Definizione 5.36** (Integrale lungo una curva).

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  una curva regolare a tratti con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è continua definiamo

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

*Osservazione 5.37.*

La definizione è invariante per riparametrizzazione crescente e cambia segno per riparametrizzazione decrescente.

**Definizione 5.38** (Campo di vettori).

Un **campo di vettori** è una mappa

$$v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continua, dove  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  aperto. Spesso scriveremo  $v$  al posto di  $v(x)$ . Come notazione standard scriviamo

$$v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x)).$$

**Definizione 5.39** (Lavoro).

Dato un campo di vettori  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  e una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  definiamo il **lavoro** di  $v$  lungo  $\gamma$  come

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma} v \cdot T = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt,$$

dove  $T(t)$  è il vettore tangente  $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ .

*Osservazione 5.40* (Lavoro e riparametrizzazioni).

Il lavoro è invariante per riparametrizzazioni crescenti e cambia segno per riparametrizzazioni decrescenti.

### 5.2.1 1-Forme differenziali

Possiamo riformulare i campi di vettori in termini di quelle che chiameremo 1-Forme differenziali. Dato che lavoriamo in  $\mathbb{R}^n$  vedremo che i due concetti sono del tutto equivalenti, ma quando tratteremo generalizzazioni di questi concetti il linguaggio delle forme risulta essere molto più comodo.

**Definizione 5.41** (Covettore).

Un **covettore** è un funzionale  $L \in (\mathbb{R}^n)^*$  lineare e continuo.

*Osservazione 5.42.*

Per ogni covettore  $L$  esiste un unico  $v \in \mathbb{R}^n$  tale che  $L(x) = \langle v, x \rangle$ , in realtà  $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ .

**Fatto 5.43** (Teorema di Riesz).

Se  $X$  è uno spazio di Hilbert allora  $X^* \cong X$ .

*Osservazione 5.44.*

Non tutti gli spazi di Banach sono tali che  $X^* \cong X$ .

**Notazione 5.45** (Base duale canonica).

Siano  $dx_i \in (\mathbb{R}^n)^*$  i funzionali definiti da  $dx_i(v) = \langle e_i, v \rangle = v_i$ . Si vede che  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  è una base di  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

**Definizione 5.46** (1-Forma differenziale).

Una mappa  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  si dice 1-Forma differenziale su  $A$ .

**Definizione 5.47** (Campo vettoriale corrispondente a forma).

Per ogni 1-forma possiamo scrivere

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n c_i(x) dx_i.$$

Il **campo vettoriale corrispondente** alla 1-forma  $\omega$  è dato da

$$c(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x)).$$

**Definizione 5.48** (Integrale di una forma).

Se  $\omega$  è una 1-forma differenziale continua e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  è una curva regolare a tratti allora definiamo il suo **integrale** come

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} c = \int_0^1 c(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n c_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t) dt,$$

dove  $c$  è il campo vettoriale corrispondente a  $\omega$ .

*Osservazione 5.49* (Scorciatoia formale).

Formalmente è come se ponessimo

$$x = \gamma(t), \quad dx_i = \frac{d\gamma_i}{dt} dt.$$

**Definizione 5.50** (Differenziale).

Data  $f \in C^1(A)$  definiamo il suo **differenziale** come

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

*Osservazione 5.51.*

Il campo di vettori associato al differenziale è il gradiente.

## 5.2.2 Forme Esatte e Chiuse

**Definizione 5.52** (Forma esatta).

Una 1-forma continua  $\omega$  si dice **esatta** se  $\exists f \in C^1(A)$  tale che  $\omega = df$ .

Se  $\omega$  è esatta il suo campo di vettori associato è detto **conservativo**.

La funzione  $f$  è detta **primitiva** della forma  $\omega$  o **potenziale** del campo di vettori associato.

**Definizione 5.53** (Forma chiusa).

Una 1-forma  $\omega = \sum_{i=1}^n c_i dx_i$  di classe  $C^1$  è **chiusa** se per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  si ha

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_j}{\partial x_i}.$$

Il campo di vettori associato ad una forma chiusa è detto **irrotazionale**.

*Osservazione 5.54* (Esatte regolari sono chiuse).

Se  $\omega$  è esatta e di classe  $C^1$  (ammette primitiva  $f$  di classe  $C^2$ ) allora per il **Teorema di Schwarz** si ha che  $\omega$  è chiusa.

*Osservazione 5.55* (Integrali di forme esatte).

Se  $\omega$  è esatta allora per  $f$  primitiva si ha

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

In particolare se  $\gamma$  è una curva regolare chiusa allora

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

*Dimostrazione.*

Segue calcolando

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = \int_0^1 \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)),$$

dove l'ultimo passaggio è il teorema fondamentale del calcolo. □

**Proposizione 5.56** (Esistono forme chiuse ma non esatte).

La forma

$$\omega_0(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

(definita su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ) è chiusa ma non esatta.

*Dimostrazione.*

Consideriamo la curva chiusa

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Se  $\omega_0$  fosse esatta dovremmo avere  $\int_{\gamma} \omega_0 = f((1,0)) - f((1,0)) = 0$  per una ipotetica primitiva  $f$ , eppure

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega_0 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \\ &= 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Osserviamo però che  $\omega_0$  è chiusa, infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

□

Cerchiamo di caratterizzare le forme esatte:

**Teorema 5.57** (Caratterizzazione delle forme esatte su aperti).

Sia  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  una forma continua su  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1.  $\omega$  è esatta
2. Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono curve tali che  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  e  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ , allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

3. Se  $\gamma$  è una curva chiusa,  $\int_{\gamma} \omega = 0$ .

*Dimostrazione.*

1  $\implies$  3) Sia  $f$  una primitiva di  $\omega$ . Se  $\gamma$  è una curva chiusa allora  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , quindi

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(0)) - f(\gamma(1)) = 0$$

3  $\implies$  2) Definiamo  $\gamma = \gamma_1 * \overline{\gamma_2}$  la giunzione dei due cammini (dove  $\overline{\psi}(t) = \psi(1-t)$ ). Osserviamo che  $\gamma$  è una curva continua chiusa (per la continuità abbiamo percorso  $\gamma_2$  al contrario e abbiamo sfruttato che hanno gli stessi estremi), quindi

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \implies \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

dove per spezzare l'integrale sui pezzi di  $\gamma$  abbiamo usato l'invarianza per riparametrazioni monotone con opportuno segno (5.40) e l'additività dell'integrale sul dominio.

2  $\implies$  1) Proviamo a costruire una primitiva di  $\omega$ . Fissiamo  $x_0 \in A$  e senza perdita di generalità supponiamo che  $A$  coincida con la componente connessa che contiene  $x_0$  (se ci

sono più componenti connesse basta costruire una primitiva su ogni componente e unire i domini). Poniamo

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega,$$

dove  $\gamma_x$  è una qualsiasi curva da  $x_0$  a  $x$  (la condizione (2) garantisce che l'integrale non dipende dalla curva che abbiamo scelto).

Se  $\omega = \sum c_i dx_i$  vogliamo verificare che  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = c_i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{\gamma_x * \gamma_h} \omega - \int_{\gamma_x} \omega \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega, \end{aligned}$$

dove  $\gamma_h(t) = x + te_i$  per  $t \in [0, h]$ , infatti  $\gamma_x * \gamma_h$  è un cammino da  $x$  a  $x + he_i$ , quindi  $\int_{\gamma_x * \gamma_h} \omega = f(x + he_i)$  per quanto detto. Osservando che  $\gamma_h'(t) = e_i$  si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{c_i(x + te_i)}_{c(\gamma_h) \cdot \gamma_h'} dt = c_i(x),$$

dove l'ultimo passaggio è il teorema fondamentale del calcolo. □

### 5.2.3 Casi in cui Chiusa implica Esatta

**Proposizione 5.58** (Forme chiuse su curve Omotope).

Siano  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A$  curve con gli stessi estremi e sia  $\omega$  una forma chiusa su  $A$ . Se  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono omotope ( $\gamma_0 \sim \gamma_1$ ) allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

*Dimostrazione.*

Sia  $H$  una omotopia da  $\gamma_0$  a  $\gamma_1$ . Se poniamo  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  allora basta mostrare che

$$f(s) = \int_{\gamma_s} \omega$$

è costante in  $s$ . Verifichiamo che la sua derivata in  $s$  è nulla, cioè che

$$f'(s) = \frac{\partial}{\partial s} \int_{\gamma_s} \omega = \frac{\partial}{\partial s} \int_{H(t,s)} \omega = 0.$$

La parte rimanente della dimostrazione è un conto. Per semplificare la notazione e (cercare di) non perdere indici per strada facciamo il caso di  $n = 2$ :

Siano  $\omega = adx + bdy$  e  $H = (H^1, H^2)$ . Poiché possiamo approssimare uniformemente mappe continue con mappe  $C^{25}$  supponiamo  $H \in C^2$ . Per semplicità notazionale

<sup>5</sup>per esempio con delle convoluzioni

indicheremo le derivate parziali mettendo la variabile al pedice

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 (\omega(H(t, s))) \cdot H_t dt = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 (a(H^1, H^2), b(H^1, H^2)) \cdot (H_t^1, H_t^2) dt = \\
&= \int_0^1 (a_x H_s^1 + a_y H_s^2, b_x H_s^1 + b_y H_s^2) \cdot (H_t^1, H_t^2) + (a, b) \cdot (H_{ts}^1, H_{ts}^2) dt = \\
&= \int_0^1 (a_x H_s^1 H_t^1 + a_y H_s^2 H_t^1) + (b_x H_s^1 H_t^2 + b_y H_s^2 H_t^2) + a H_{ts}^1 + b H_{ts}^2 dt \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \\
&= \int_0^1 (a_x H_s^1 H_t^1 + a_y H_t^2 H_s^1) + a_y H_s^2 H_t^1 - a_y H_t^2 H_s^1 + \\
&\quad + (b_x H_t^1 H_s^2 + b_y H_t^2 H_s^2) - b_x H_t^1 H_s^2 + b_x H_s^1 H_t^2 + a H_{st}^1 + b H_{st}^2 dt = \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} ((a, b) \cdot (H_s^1, H_s^2)) + a_y H_s^2 H_t^1 - a_y H_t^2 H_s^1 - b_x H_t^1 H_s^2 + b_x H_s^1 H_t^2 dt = \\
&= \underbrace{a(H(1, s)) H_s^1(1, s) - a(H(0, s)) H_s^1(0, s)}_{=0} + \\
&\quad + \underbrace{b(H(1, s)) H_s^2(1, s) - b(H(0, s)) H_s^2(0, s)}_{=0} + \\
&\quad + \int_0^1 \underbrace{(a_y - b_x)}_{=0} (H_t^1 H_s^2 - H_s^1 H_t^2) dt = 0,
\end{aligned}$$

dove per le cancellazioni dei termini di bordo abbiamo usato il fatto che  $H$  è una omotopia a estremi fissi, mentre  $a_y = b_x$  per definizione di forma chiusa.  $\square$

**Corollario 5.59** (Forme chiuse con integrale nullo su generatori del  $\pi_1$  sono esatte).  
Se  $A$  è connesso e  $[\gamma_1], \dots, [\gamma_N]$  sono dei generatori di  $\pi_1(A)$ , se  $\omega$  è una forma chiusa abbiamo che

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \int_{\gamma_i} \omega = 0 \implies \omega \text{ esatta.}$$

*Dimostrazione.*

Segue dalla **Caratterizzazione delle forme esatte su aperti** e dalla proposizione sopra.  $\square$

*Osservazione 5.60.*

Se  $\gamma$  è una curva omotopa alla curva costante e  $\omega$  è una forma chiusa allora  $\int_{\gamma} \omega = 0$ .

*Osservazione 5.61.*

Se  $A$  è semplicemente connesso e  $\omega$  è una forma chiusa su  $A$  allora  $\omega$  è esatta.

*Osservazione 5.62.*

Se  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  non è semplicemente connesso allora esistono delle forme chiuse non esatte.

*Dimostrazione.*

Consideriamo una curva di classe non banale in  $\pi_1(A)$ . Possiamo definire la nostra forma come una variante di quella nella proposizione (5.56).  $\square$

**Proposizione 5.63** (Forme chiuse su curve chiuse Omotope).

Se  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono curve chiuse omotope come curve chiuse<sup>6</sup> e  $\omega$  è una forma chiusa allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

<sup>6</sup>Esiste una omotopia  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  che porta la prima nella seconda tale che  $\gamma_s(t) = H(s, t)$  è sempre una curva chiusa.

*Dimostrazione.*

Sia  $\delta(t) = H(0, t) = H(1, t)$ . Per la continuità di  $H$  questa è una curva. Osserviamo ora che  $\gamma_0 \sim \delta * \gamma_1 * \bar{\delta}$  con estremi fissati (gli estremi in questione sono  $H(0, 0) = H(0, 1)$ ). A meno di riparametrizzare possiamo supporre  $\delta * \gamma_1 * \bar{\delta} \in C^1$  a tratti.

Per concludere basta osservare che

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\delta * \gamma_1 * \bar{\delta}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\delta * \bar{\delta}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\text{costante}} \omega,$$


dove per cambiare le curve su cui integriamo si usa la chiusura di  $\omega$  e la proposizione (5.58).  $\square$

### 5.3 Teorema di Gauss-Green

Il teorema di Gauss-Green è una generalizzazione del teorema fondamentale del calcolo che ci permette di relazionare l'integrale delle derivate parziali su un dominio con l'integrale della funzione sul bordo del dominio.

**Definizione 5.64** (Domini normali e regolari).

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme chiuso senza punti isolati. Affermiamo che  $D$  è

- **normale rispetto a  $x$**  se esistono  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f \leq g$  e

$$D = \{(x, y) \mid f(x) \leq y \leq g(x), x \in [a, b]\}$$

- **normale rispetto a  $y$**  se esistono  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $f \leq g$  e

$$D = \{(x, y) \mid f(y) \leq x \leq g(y), y \in [a, b]\}$$

- **normale regolare** se è normale rispetto a  $x$  o  $y$  e  $f, g \in C^1$
- **regolare** se è unione finita di insiemi normali regolari con parte interna disgiunta.

*Osservazione 5.65.*

L'idea dei domini regolari è caratterizzare le regioni per le quali possiamo parametrizzare il bordo.

*Osservazione 5.66.*

Se  $D$  è regolare allora  $\partial D$  è  $C^1$  a tratti (cioè è unione finita di supporti di curve  $C^1$ ).

*Osservazione 5.67.*

$\partial D$  è unione finita di curve chiuse  $C^1$  a tratti.

**Definizione 5.68** (Bordo orientato).

Dato  $D$  regolare, parametrizziamo le curve chiuse che formano  $\partial D$  in modo che<sup>7</sup>

$$\text{sgn}(T(\gamma, t) \times N(\gamma, t)) = -1$$

per ogni curva  $\gamma$  che costituisce  $\partial D$  (con  $N$  indichiamo il vettore normale che ESCE da  $D$ ), cioè in modo tale che il vettore tangente e il vettore normale uscente da  $D$  abbiano sempre lo stesso orientamento relativo.

L'orientazione così definita si dice **orientazione positiva** di  $\partial D$ .

Per indicare che al bordo è stata data l'orientazione positiva scriviamo  $\partial^+ D$  al posto di  $\partial D$ .

**Teorema 5.69** (Teorema di Gauss-Green).

Siano  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare e  $f, P, Q \in C^1(A)$  con  $D \subseteq A$  aperto. Allora vale quanto segue:

<sup>7</sup>Ricordo che stiamo usando la definizione 2D del prodotto vettore, la quale restituisce un numero reale, non un vettore.

- $\int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial^+ D} f dy$
- $\int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial^+ D} f dx$
- $\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy.$

*Dimostrazione.*

Dimostriamo solo la prima affermazione: la seconda si ottiene in modo del tutto analogo e la terza è equivalente alle prime due messe insieme. Mostriamo la tesi prima per domini normali rispetto ad una variabile e sfruttando questo risultato ricostruiamo il teorema per domini regolari.

*D normale rispetto a y* Siano  $h, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$D = \{(x, y) \in [a, b] \times [c, d] \mid h(y) \leq x \leq g(y)\},$$

dove  $a = \min_{y \in [c, d]} h(y)$  e  $b = \max_{y \in [c, d]} g(y)$ .

Vediamo che  $\partial^+ D$  è composto da 4 curve:

$$\gamma_1(x) = (x, c), \quad \gamma_2(y) = (g(y), y), \quad \bar{\gamma}_3(x) = (x, d), \quad \bar{\gamma}_4(y) = (h(y), y),$$

dove  $\gamma_1$  e  $\bar{\gamma}_3$  hanno  $[a, b]$  come dominio e  $\gamma_2$  e  $\bar{\gamma}_4$  sono definite su  $[c, d]$ .

La tesi segue calcolando:

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} f dy &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} f dy = \int_{\gamma_1} f dy + \int_{\gamma_2} f dy - \int_{\gamma_3} f dy - \int_{\gamma_4} f dy = \\ &= \int_a^b f(\gamma_1(t)) \cdot 0 dt + \int_c^d f(g(t), t) \cdot 1 dt + \\ &\quad - \int_a^b f(\gamma_3(t)) \cdot 0 dt - \int_c^d f(h(t), t) \cdot 1 dt = \\ &= \int_c^d f(g(y), y) - f(h(y), y) dy = \\ &= \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy \stackrel{\text{F.T.}}{=} \int_D \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned}$$

*D normale rispetto a x* Siano  $h, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$D = \{(x, y) \mid h(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Come prima  $\partial^+ D$  è composto da 4 curve

$$\gamma_1(x) = (x, h(x)), \quad \gamma_2(y) = (b, y), \quad \bar{\gamma}_3(x) = (x, g(x)), \quad \bar{\gamma}_4(y) = (a, y).$$

Vorremmo ricondurci ad un caso simile al precedente. A questo scopo definiremo una particolare forma esatta tale che abbia  $f dy$  come componente. Così facendo potremo integrare l'altra componente che rispetterà ipotesi più simili al caso precedente.

Introduciamo la seguente mappa  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{(x,y)}} f dy = \int_a^x f(t, h(t)) h'(t) dt + \int_{h(x)}^y f(x, t) dt,$$

dove quindi  $\gamma_{(x,y)}$  è il cammino da  $(a, h(a))$  a  $(x, y)$  contenuto in  $D$  che passa prima lungo  $\gamma_1$  e poi sale con un segmento. Osserviamo che

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$$

e che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= f(x, h(x))h'(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{h(x+\varepsilon)}^y f(x+\varepsilon, t) dt - \int_{h(x)}^y f(x, t) dt \right) = \\
&= f(x, h(x))h'(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{h(x+\varepsilon)}^y f(x+\varepsilon, t) dt - \int_{h(x+\varepsilon)}^y f(x, y) dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{h(x+\varepsilon)}^y f(x, t) dt - \int_{h(x)}^y f(x, t) dt \right) = \\
&= f(x, h(x))h'(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{h(x)}^y \frac{f(x+\varepsilon, t) - f(x, t)}{\varepsilon} dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{h(x+\varepsilon)}^{h(x)} f(x, t) dt = \\
&= \underline{f(x, h(x))h'(x)} + \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \underline{f(x, h(x))h'(x)} = \\
&= \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.
\end{aligned}$$

Si ha dunque che

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left( \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx + f dy.$$

Chiaramente questa forma è esatta e, dato che  $F$  è  $C^2$ , abbiamo che è anche chiusa (5.54). Osserviamo dunque che

$$\int_{\partial^+ D} dF = 0 \implies \int_{\partial^+ D} f dy = - \int_{\partial^+ D} \left( \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right) dx.$$

La tesi segue sviluppando questo integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+ D} f dy &= - \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \int_{h(x)}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt dx = \\
&= - \underbrace{\int_a^b \int_{h(u)}^{h(u)} \frac{\partial f}{\partial x}(u, t) dt 1 du}_{\text{stessi estremi} \implies 0} - \int_c^d \int_{h(b)}^u \frac{\partial f}{\partial x}(b, t) dt 0 du + \\
&\quad + \int_a^b \int_{h(u)}^{g(u)} \frac{\partial f}{\partial x}(u, t) dt 1 du + \int_c^d \int_{h(a)}^u \frac{\partial f}{\partial x}(a, t) dt 0 du = \\
&= -0 - 0 + \int_a^b \int_{h(u)}^{g(u)} \frac{\partial f}{\partial x}(u, t) dt du + 0 \stackrel{\text{F.T.}}{=} \\
&= \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.
\end{aligned}$$

$D$  regolare) Scriviamo  $D = \bigcup_{i=1}^N D_i$  con  $D_i$  normali regolari con parti interne disgiunte. Osserviamo che

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^N \int_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x},$$

mentre per l'integrale di bordo abbiamo

$$\int_{\partial^+ D} f dy = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ D_i} f dy - \underbrace{\sum_{i \neq j} \int_{\partial^+ D_i \cap \partial^+ D_j} f dy}_{=0} = \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+ D_i} f dy.$$

Per i punti precedenti abbiamo la tesi. □

Grazie al teorema di Gauss-Green possiamo dedurre risultati importanti su divergenza e rotore:

**Definizione 5.70** (Divergenza (caso 2D)).

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare e sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $A \supseteq D$  aperto un campo di vettori. Se  $F = (F_1, F_2)$  allora la **divergenza** di  $F$  è definita come

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \text{ "}" \nabla \cdot F$$

**Definizione 5.71** (Flusso di un campo di vettori).

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  regolare e sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $A \supseteq D$  aperto un campo di vettori. Definiamo il **flusso** di  $F$  attraverso  $\partial D$  come

$$\int_{\partial D} F \cdot N$$

dove  $N$  è il vettore normale a  $\partial D$  uscente da  $D$ .

**Teorema 5.72** (Teorema della divergenza (caso 2D)).

L'integrale della divergenza su un dominio regolare coincide con il flusso attraverso il bordo del dominio:

$$\int_D \operatorname{div}(F) = \int_{\partial D} F \cdot N$$

*Dimostrazione.*

Per il **Teorema di Gauss-Green** abbiamo che

$$\int_D \operatorname{div}(F) = \int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \int_D \frac{\partial F_2}{\partial y} = \int_{\partial^+ D} F_1 dy - F_2 dx.$$

Dato che  $D$  è regolare sappiamo che  $\partial D$  è unione finita di curve chiuse  $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ . Osserviamo che i vettori tangenti e normali a queste curve sono dati da

$$T_i(t) = \frac{1}{|\gamma'_i|} (x'_i, y'_i), \quad N_i(t) = \frac{1}{|\gamma'_i|} (y'_i(t), -x'_i(t)).$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{div}(F) &= \sum_i \int_0^1 F_1(x_i, y_i) y'_i - F_2(x_i, y_i) x'_i dt = \\ &= \sum_i \int_0^1 \frac{F_1(x_i, y_i) y'_i - F_2(x_i, y_i) x'_i}{|\gamma'_i(t)|} |\gamma'_i(t)| dt = \\ &= \sum_i \int_{\gamma_i} F \cdot N_i = \\ &= \int_{\partial D} F \cdot N. \end{aligned}$$

□

**Definizione 5.73** (Rotore (provvisoria)).

Dato un campo di vettori  $F = (F_1, F_2)$ , il suo **rotore** è dato da

$$\operatorname{rot}(F) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

La definizione è provvisoria perché l'espressione pura del rotore è 3D.

**Teorema 5.74** (Teorema di Stokes (Caso 2D)).

L'integrale del rotore su un dominio regolare coincide con il lavoro lungo il bordo del dominio:

$$\int_D \operatorname{rot}(F) = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy.$$

*Dimostrazione.*

La tesi è equivalente alla tesi del **Teorema di Gauss-Green**.  $\square$

*Osservazione 5.75* (Campi irrotazionali su semplicemente connesso ammettono potenziale).

Si ha che  $F$  è irrotazionale, cioè  $F_1 dx + F_2 dy$  è chiusa, se e solo se  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$  e quindi per ogni  $D$  regolare

$$\int_{\partial^+ D} F_1 dx + F_2 dy = 0.$$

Se  $A$  è semplicemente connesso allora ogni curva chiusa  $\gamma$  la posso vedere a meno di omotopia come bordo di un dominio regolare, quindi

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy = 0 \implies F_1 dx + F_2 dy \text{ è esatta.}$$

*Osservazione 5.76.*

In  $\mathbb{R}^2$  il teorema della divergenza e il teorema di Stokes evidentemente equivalenti, ma salendo di dimensione le tesi non sono più equivalenti.

**Proposizione 5.77** (Formula dell'area).

Se  $D$  è un dominio regolare

$$|D| = \int_{\partial^+ D} x dy = \int_{\partial^+ D} -y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} -y dx + x dy.$$

*Dimostrazione.*

Siano  $f_1(x, y) = x$  e  $f_2(x, y) = y$ . Osserviamo che  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1$  e  $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$ , quindi per il **Teorema di Gauss-Green**

$$\int_{\partial^+ D} -y dx = \int_D \frac{\partial f_2}{\partial y} = |D| = \int_D \frac{\partial f_1}{\partial x} = \int_{\partial^+ D} x dy.$$

L'ultima formula si ricava sommando le due sopra e dividendo per 2.  $\square$

**Teorema 5.78** (Disuguaglianza Isoperimetrica).

Sia  $D$  un dominio regolare di  $\mathbb{R}^2$  con bordo di lunghezza  $2\pi$  e omeomorfo al disco  $D^2$ . Allora ha area minore o uguale a  $\pi$  e vale l'uguaglianza se e solo se  $D$  è un disco.

*Dimostrazione.*

Sia  $\gamma$  la parametrizzazione di  $\partial^+ D$  per lunghezza d'arco e scriviamo

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \text{ con } t \in [0, 2\pi].$$

Dato che  $|\gamma'(t)| = 1$  per ogni  $t \in [0, 2\pi]$  (5.35), si ha che  $|\gamma'(t)|^2 = 1$ . Da questa osservazione segue che

$$L(\partial^+ D) = L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'| dt = \int_0^{2\pi} |\gamma'|^2 dt = \int_0^{2\pi} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 dt.$$

Dalla **Formula dell'area** si ha che

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt.$$

Poniamo  $z(t) = x(t) + iy(t) \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , che posso pensare come funzione  $2\pi$ -periodica da  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^2$ . Possiamo riscrivere le formule sopra come

$$L(\partial^+ D) = \int_0^{2\pi} z'(t) \overline{z'(t)} dt = \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt$$

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Im(\bar{z}(t)z'(t))dt = \Im\left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{z}(t)z'(t)dt\right),$$

dove le sopralineature indicano il coniugato complesso.

Data la regolarità e periodicità di  $z(t)$ , possiamo definirne la serie di Fourier

$$z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}, \text{ con } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(t) e^{-ikt} dt.$$

Segue immediatamente che

$$z'(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ikc_k e^{ikt}.$$

Sfruttando le scritture per lunghezza e area in termini di  $z$  e ricordando il teorema 4.49 troviamo

$$L(\partial^+ D) = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2$$

$$\text{Area}(D) = \Im\left(\frac{\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \bar{z}(t)z'(t)dt\right) = \pi \Im\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} ik\bar{c}_k c_k\right) = \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k |c_k|^2.$$

Dato che  $L(\partial^+ D) = 2\pi$  si ha che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 = 1,$$

e dato che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k |c_k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 = 1,$$

si ha che  $\text{Area}(D) \leq \pi \cdot 1$ .

Osserviamo inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se  $c_k = 0$  per ogni  $k \neq 0, 1$ , cioè se e solo se  $z = c_0 + c_1 e^{it}$ , cioè  $\gamma(t) = (x_0 + R \cos(t), y_0 + R \sin(t))$ , cioè  $D$  è un disco.  $\square$

## 5.4 Forme particolari

**Proposizione 5.79** (Forme con simmetria radiale).

Sia  $\omega = \sum A_i(x) dx_i$  con  $A_i(x) = a(|x|)x_i$ . Abbiamo allora che  $\omega$  è esatta in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e ha come potenziale  $U = \phi(|x|)$  con  $\phi'(t) = ta(t)$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\phi$  la primitiva di  $t \mapsto a(t)t$ . Si ha che

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \phi'(|x|) \frac{x_i}{|x|} = \cancel{|x|} a(|x|) \frac{x_i}{\cancel{|x|}} = a(|x|)x_i = A_i(x),$$

cioè  $dU = \omega$  come voluto.  $\square$

**Definizione 5.80** (Armoniche coniugate).

Sia  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una mappa armonica ( $\Delta U = 0$ ). Se  $V$  è un'altra tale mappa armonica e

$$\nabla U \cdot \nabla V = 0$$

allora  $U$  e  $V$  si dicono **armoniche coniugate**.

**Proposizione 5.81** (Mappe armoniche di classe  $C^2$  ammettono armoniche coniugate).

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  semplicemente connesso e consideriamo una mappa  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \in C^2(\Omega)$  armonica ( $\Delta U = 0$ ). Allora esiste  $V$  tale che  $\nabla U \cdot \nabla V = 0$ .

*Dimostrazione.*

Consideriamo la forma

$$\omega = -\frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{\partial U}{\partial x} dy.$$

Osserviamo che se questa ammette primitiva, questa avrà necessariamente gradiente ortogonale a quello di  $U$ :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0$$

Dato che  $\Omega$  è semplicemente connesso, basta mostrare che la forma è chiusa (5.59). Dato che  $U$  è armonica si ha che

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

cioè  $\omega$  è chiusa come volevamo. □

*Osservazione 5.82.*

Se  $\Omega$  non è semplicemente connesso allora non è detto che  $\omega$  sia esatta, per esempio la forma che costruiremmo dalla seguente mappa armonica non è chiusa:

$$U = \log(x^2 + y^2).$$

### 5.4.1 Forme del piano meno l'origine

**Definizione 5.83** (Primo gruppo di coomologia).

Dato uno spazio  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , il suo primo **gruppo di coomologia** (di de-Rahm) è dato da

$$H^1(A) = \{\omega \in C^1(A, (\mathbb{R}^n)^*) \text{ 1-forma chiusa}\} / \{\omega \in C^1(A, (\mathbb{R}^n)^*) \text{ 1-forma esatta}\}.$$

Questo insieme è ben definito per l'osservazione (5.54) ed eredita la somma senza problemi.

Ricordiamo che la forma

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

è definita su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ed è chiusa ma non esatta (5.56). Dalla proposizione che segue vedremo che questa è un generatore di  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ :

**Proposizione 5.84** (Caratterizzazione di  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ ).

*Sia  $\omega$  una forma chiusa di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  di classe almeno  $C^1$ . Esistono  $c \in \mathbb{R}$  e  $U \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  tali che*

$$\omega = dU + c\omega_0, \quad \text{con } \omega_0 = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

*cioè  $\omega_0$  è un generatore di  $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  su  $\mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.*

Consideriamo  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  per  $t \in [0, 2\pi]$ , la quale è un generatore di  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ . Affinché la tesi valga, l'unica possibilità per  $c$  è

$$c = \left(\int_{\gamma} \omega_0\right)^{-1} \int_{\gamma} \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega.$$

Definiamo ora  $\omega_1 = \omega - c\omega_0$ . Per mostrare la tesi basta vedere che  $\omega_1$  è esatta (la sua primitiva sarà la  $U$  cercata). Osserviamo che  $\omega_1$  è chiusa in quanto differenza di forme

chiuse, quindi per verificare l'esattezza basta calcolarne l'integrale su  $\gamma$  (5.59) e verificare se è nullo:

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega - c \int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\gamma} \omega - \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\gamma} \omega \right) 2\pi = 0.$$

□

**Definizione 5.85** (Indice di Avvolgimento).

Data una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  definiamo il suo **indice di avvolgimento** come

$$\text{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \omega_0.$$

**Proposizione 5.86** (L'indice di avvolgimento non dipende dal modulo degli estremi).

Data una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sia  $\tilde{\gamma}$  una curva tale che:

- $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)/|\gamma(0)|$ ,  $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(1)/|\gamma(1)|$
- se  $\delta_1(t) = t\tilde{\gamma}(0) + (1-t)\gamma(0)$  e  $\delta_2(t) = t\gamma(1) + (1-t)\tilde{\gamma}(1)$  ( $t \in [0, 1]$ ), allora esiste una omotopia a estremi fissi tra  $\gamma$  e  $\delta_1 * \tilde{\gamma} * \delta_2$ .

Si ha che

$$\text{ind}(\gamma) = \text{ind}(\tilde{\gamma}).$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che i supporti di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  sono radiali rispetto all'origine, quindi hanno integrale nullo per  $\omega_0$ , infatti per un generico segmento radiale  $\sigma(t) = (at, bt)$  con  $t \in [c, d]$  si ha che

$$\omega_0(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \frac{1}{a^2t^2 + b^2t^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{=0} = 0 \implies \int_{\sigma} \omega_0 = \int_c^d 0 dt = 0.$$

Segue dunque per la proposizione (5.58) che

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\delta_1 * \tilde{\gamma} * \delta_2} \omega_0 = \int_{\tilde{\gamma}} \omega_0 + 0 + 0.$$

□

*Osservazione 5.87.*

Oltre alle ipotesi sopra possiamo imporre anche

- $\text{Imm } \tilde{\gamma} \subseteq S^1$
- $\tilde{\gamma}$  di classe  $C^1$  e  $|\tilde{\gamma}'(t)| \neq 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ ,

cioè l'indice di avvolgimento dipende solo da “quante volte giriamo attorno all'origine”.

Formalizziamo l'osservazione sopra con la seguente

**Proposizione 5.88** (L'indice di avvolgimento misura l'angolo percorso attorno l'origine).

Sia

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (0, +\infty) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (\rho, \theta) & \longmapsto & (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{array}$$

la funzione del cambio di variabili tra cartesiane e polari. Se

$$\tilde{\gamma} : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & (0, +\infty) \times \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\rho(t), \theta(t)) \end{array}$$

è un cammino visto in coordinate polari allora

$$\int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_{\Phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0.$$

*Dimostrazione.*  
Ricordiamo che

$$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente e mostriamo che coincidono:

$$\int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \int_a^b \theta'(t) dt.$$

Osserviamo che  $\Phi \circ \tilde{\gamma} = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t))$ , quindi

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \tilde{\gamma}} \omega_0 &= \int_a^b \frac{\rho \cos \theta (\rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta) - \rho \sin \theta (\rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta)}{\rho^2} dt = \\ &= \int_a^b \frac{\rho^2 \theta' \cos^2 \theta + \rho^2 \theta' \sin^2 \theta}{\rho^2} dt = \\ &= \int_a^b \theta' dt. \end{aligned}$$

□

*Osservazione 5.89.*

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è di classe  $C^1$  con  $\gamma(a) = \gamma(b)$  allora, fissato  $P \in \Phi^{-1}(\gamma(a))$ , esiste un'unica curva  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow (0, +\infty) \times \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che  $\Phi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ .

*Dimostrazione (NON DATA DURANTE IL CORSO).*

Osserviamo che  $\Phi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è un rivestimento, infatti l'azione di  $\mathbb{Z}$  su  $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$  data da  $n \cdot (\rho, \theta) = (\rho, \theta + 2\pi n)$  è propriamente discontinua (basta scegliere aperti di diametro minore di  $2\pi$ ) e il suo quoziente, omeomorfo a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , è connesso. Segue dunque che, dato  $P$  nella fibra di  $\gamma(a)$ , esiste un unico sollevamento  $\tilde{\gamma}$ . Osserviamo inoltre che  $\Phi$  è un diffeomorfismo locale, dunque dalla regolarità di  $\gamma$  segue la regolarità di  $\tilde{\gamma}$ .<sup>8</sup> □

*Osservazione 5.90 (L'indice di avvolgimento è intero per cammini chiusi).*

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  è un cammino chiuso di classe  $C^1$  allora

$$\int_{\gamma} \omega_0 = \int_{\Phi(\tilde{\gamma})} \omega_0 = \int_{\tilde{\gamma}} d\theta = \underbrace{\theta(b) - \theta(a)}_{\text{curva chiusa}} \in 2\pi\mathbb{Z},$$

cioè  $ind(\gamma) \in \mathbb{Z}$  per cammini chiusi.

## 5.5 K-Superfici e Misure di Hausdorff

**Definizione 5.91** (Superficie).

Un insieme  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  è una **superficie di dimensione  $k$**  (o  **$k$ -superficie**) di classe  $C^1$  se, detta  $B_1$  la palla unitaria in  $\mathbb{R}^k$ , per ogni  $x_0 \in \Sigma$  esiste  $\varphi : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  tale che  $x_0 \in \varphi(B_1) \subseteq \Sigma$  e  $\text{rnk}(\mathcal{D}\varphi(x)) = k$  per ogni  $x \in B_1$ .

La superficie  $\Sigma$  è **embedded** se possiamo sempre scegliere  $\varphi$  tale che  $\varphi(B_1) \supseteq \Sigma \cap B_R(x_0)$  per qualche  $R > 0$ .

*Osservazione 5.92.*

La condizione “embedded” ci garantisce di poter ricostruire  $\Sigma$  a partire da informazioni locali, evita dunque problemi di auto-intersezione di  $\Sigma$  e altri fenomeni scomodi.

Cerchiamo ora di rispondere alla seguente domanda:

<sup>8</sup>Per capire questa dimostrazione vi invito caldamente a consultare il corso di geometria 2.

Come si calcola l'area  $k$ -dimensionale di  $\Sigma$ ?

Questa domanda ci porterà a definire le misure di Hausdorff.

Giustificiamo la formula che otterremo risolvendo gradualmente il problema con ipotesi forti su  $\Sigma$  e allentandole gradualmente.

$\varphi$  lineare e  $\Sigma = \varphi(U)$  Sia  $\varphi(x) = Lx$  con  $L \in M(n, k, \mathbb{R})$  matrice di rango  $k$ . Consideriamo due casi:

$L$  ortogonale) Se  $L$  è ortogonale allora  $L^\top L = I_k$ . Ha senso definire la misura di  $\Sigma$  come quella di  $U$ , dato che ne è una rotazione, poniamo dunque

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = |U|_{\mathbb{R}^k}.$$

$L$  generale) Osserviamo che possiamo scrivere  $L = MS$  con  $S \in M(k, \mathbb{R})$  e  $M \in M(n, k, \mathbb{R})$  ortogonale, per esempio applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt. Per quanto detto sopra avremo

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \mathcal{H}^k(MS(U)) = |S(U)|_{\mathbb{R}^k} \stackrel{\text{camb. var.}}{=} |\det S| |U|_{\mathbb{R}^k}.$$

Per scrivere tutto in termini di  $L$  e  $U$ , osserviamo che  $L^\top L = S^\top M^\top MS = S^\top S$ , da cui  $\det(L^\top L) = \det(S^\top S) = \det(S)^2$ , dunque

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \sqrt{\det(L^\top L)} |U|_{\mathbb{R}^k}.$$

$\varphi$  lineare a tratti e  $\Sigma = \varphi(U)$ ) Supponiamo  $\varphi$  lineare a tratti, cioè abbiamo una partizione di  $U = \bigcup U_i$  tale che  $\varphi|_{U_i}(x) = L_i x$  con  $L_i$  lineari di taglia  $n \times k$  e rango  $k$ . L'unica definizione che ha senso visto quanto detto sopra è

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi^\top(x)\mathcal{D}\varphi(x))} dx,$$

infatti questo integrale si spezza sui vari domini e  $\mathcal{D}\varphi$  diventa  $L_i$ . La scrittura con l'integrale è più uniforme, facilmente generalizzabile e ci permette di ignorare sottigliezze derivanti dalla intersezioni dei pezzi di  $U$ .

$\varphi$  di classe  $C^1$  e  $\Sigma = \varphi(U)$ ) Osserviamo il seguente

**Fatto 5.93** (Lineari a tratti approssimano  $C^1$  e loro differenziali uniformemente).

Se  $\varphi$  è di classe  $C^1$  allora esiste una successione di  $\varphi_n$  lineari a tratti tali che  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  e  $\mathcal{D}\varphi_n(x) \rightarrow \mathcal{D}\varphi(x)$  uniformemente per  $n \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

Detto ciò consideriamo una tale successione  $\varphi_m$  e poniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(\Sigma) &= \lim_m \mathcal{H}^k(\varphi_m(U)) = \\ &= \lim_m \int_U \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi_m^\top \mathcal{D}\varphi_m)} dx = \\ &= \int_U \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi)} dx, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla convergenza uniforme dei  $\mathcal{D}\varphi_m$ .

$\varphi$  di classe  $C^1$ ) Sfruttando la proprietà "embedded" scriviamo

$$\Sigma = \overline{\bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i)} \quad \text{con } i \neq j \implies \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset.$$

Segue che

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi_i^\top \mathcal{D}\varphi_i)} dx.$$

Ci sentiamo giustificati nel dare le seguenti definizioni

**Notazione 5.94.**

Ricalcando la notazione per il **Teorema del Cambio di variabile** scriviamo

$$J_\varphi(x) = \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi(x)^\top \mathcal{D}\varphi(x))}.$$

**Definizione 5.95** (Misura di Hausdorff per  $k$ -superfici).

Se  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i)$  è una  $k$ -superficie embedded definiamo la sua  $k$ -**misura di Hausdorff** come

$$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} J_{\varphi_i} dx.$$

*Osservazione 5.96* (Formula di Cauchy-Binet).

Se  $L \in M(n, k, \mathbb{R})$  ha rango  $k$  allora vale la seguente uguaglianza

$$\det(L^\top L) = \sum_{\substack{M \text{ minore di} \\ L \text{ di taglia } k}} \det(M)^2.$$

*Osservazione 5.97* (Dimensioni particolari).

Per  $k = n$  ritroviamo  $\mathcal{H}^n(\Sigma) = |\Sigma|$ , mentre per  $k = 1$  troviamo che per  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D}\varphi = \varphi'$  si ha  $J_\varphi = \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi)} = |\varphi'|$ , dunque

$$\mathcal{H}^1(\varphi((a, b))) = \int_a^b |\varphi'| = L(\varphi).$$

Abbiamo quindi verificato che per  $k = n$  ritroviamo la misura di Lebesgue e che per  $k = 1$  ritroviamo la lunghezza di una curva, quindi la misura di Hausdorff generalizza questi concetti.

**Definizione 5.98** (Prodotto vettore).

Dati due vettori  $v, w$  in  $\mathbb{R}^3$  definiamo il loro **prodotto vettore**<sup>9</sup> come

$$v \wedge w = v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

*Osservazione 5.99* (Jacobiano delle superfici in tre dimensioni).

Se  $k = 2$  e  $n = 3$  abbiamo

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \\ \varphi_3(x, y) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \end{pmatrix},$$

da cui troviamo

$$\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 & \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle & \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2 \end{pmatrix} \implies$$

<sup>9</sup>In realtà la notazione  $v \wedge w$  non è propria dato che  $v \wedge w$  dovrebbe essere un **bivettore**, non un vettore. Esiste però una corrispondenza naturale tra vettori e bivettori in  $\mathbb{R}^3$  e quindi in molte applicazioni, soprattutto in fisica, il prodotto vettore viene considerato come un vettore. Per distinguere meglio questi concetti personalmente preferisco riservare  $v \wedge w$  al bivettore e  $v \times w$  al vettore ma durante il corso sono state usate entrambe le notazioni.

$$\begin{aligned}
J_\varphi &= \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi)} = \sqrt{\left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\rangle^2} = \\
&= \sqrt{\left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|^2 - \cos^2 \theta \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|^2 \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|^2} = \\
&= \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right| \sin \theta = \\
&= \left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|,
\end{aligned}$$

dove  $\theta$  è l'angolo minore compreso tra  $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ .

*Osservazione 5.100* (Misura di Grafici).

Sia  $\Sigma = \Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  con  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f$  di classe  $C^1$ .

Se poniamo  $\varphi(x) = (x, f(x))$  allora  $\Gamma_f = \varphi(U)$ , calcoliamo allora  $J_\varphi$ :

$$\mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} I_n \\ \nabla f^\top \end{pmatrix} \implies \mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi = I_n + \nabla f \nabla f^\top.$$

Osserviamo che  $\nabla f^\perp$  è un l'autospazio relativo a 1 di dimensione  $n-1$  e che  $\nabla f$  è un autovettore relativo a  $1 + |\nabla f|^2$ , quindi

$$J_\varphi = \sqrt{1^{n-1}(1 + |\nabla f|^2)} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

Segue dunque che la misura di un grafico vale

$$\mathcal{H}^n(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx.$$

**Proposizione 5.101** (Misura di Hausdorff è invariante per riparametrizzazione).

Supponiamo  $\Sigma = \varphi(U) = \psi(V)$  con  $\Phi(U) = V$  e  $\Phi$  diffeomorfismo.  $\mathcal{H}^k(\Sigma)$  non cambia rispetto alla scelta tra  $\varphi$  e  $\psi$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\psi = \varphi \circ \Phi^{-1} \implies \mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\varphi(\mathcal{D}\Phi)^{-1} \implies \mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\Phi.$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(\Sigma) &= \int_U \sqrt{\det(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi)} = \\
&= \int_U \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi^\top \mathcal{D}\psi^\top \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\Phi)} = \\
&= \int_U \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi^\top) \det(\mathcal{D}\psi^\top \mathcal{D}\psi) \det(\mathcal{D}\Phi)} = \\
&= \int_U J_\Phi J_\psi \stackrel{\text{camb. var.}}{=} \\
&= \int_{\Phi(U)} J_\psi = \int_V J_\psi.
\end{aligned}$$

□

Concludiamo la sezione dando finalmente la definizione di integrale su una superficie

**Definizione 5.102** (Integrale di superficie).

Sia  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i)$  una  $k$ -superficie embedded e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supponiamo inoltre  $\Sigma \subseteq A$  con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Definiamo l'**integrale di  $f$  su  $\Sigma$**  come

$$\int_\Sigma f = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (f \circ \varphi_i) J_{\varphi_i} dx$$

*Osservazione 5.103.*

La definizione è invariante per riparametrizzazione.

**Applicazione 5.104** (Superfici di rotazione).

Consideriamo una superficie in  $\mathbb{R}^3$  parametrizzata da

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos \theta \\ \rho(t) \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \text{con } t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi],$$

consideriamo cioè  $\Sigma = \varphi([a, b] \times [0, 2\pi])$ . Si ha che

$$\mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} \rho' \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho' \sin \theta & \rho \cos \theta \\ z' & 0 \end{pmatrix} \implies \mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} (\rho')^2 + (z')^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix},$$

da cui  $J_\varphi = \rho \sqrt{(\rho')^2 + (z')^2}$  e quindi l'area della superficie vale

$$\mathcal{H}^2(\Sigma) = 2\pi \int_a^b \rho \sqrt{(\rho')^2 + (z')^2} dt.$$

## 5.6 Teorema della Divergenza

Generalizziamo il teorema della divergenza dato prima nel caso bidimensionale.

**Definizione 5.105** (Ipersuperficie).

Una  $(n-1)$ -superficie in  $\mathbb{R}^n$  embedded è detta **ipersuperficie**.

*Osservazione 5.106.*

Sia  $\Sigma$  una ipersuperficie. Osservo che per ogni  $x \in \Sigma$  abbiamo due scelte per un vettore normale, cioè una base di modulo unitario di  $T_x \Sigma^\perp$  (se una scelta è  $N$ , l'altra è  $-N$ ).

**Definizione 5.107** (Ipersuperficie orientabile).

Una ipersuperficie  $\Sigma$  è detta **orientabile** se esiste una scelta continua per il vettore normale in ogni punto di  $\Sigma$ . Se  $N(x)$  è il campo di vettori su  $\Sigma$  che restituisce una tale scelta di vettori normali allora chiamiamo  $(\Sigma, N)$  una **superficie orientata** e  $N$  la sua **orientazione** (o il suo **orientamento**), mentre chiamiamo  $\Sigma$  una **superficie orientabile**.

**Definizione 5.108** (Flusso di un campo di vettori).

Se  $(\Sigma, N)$  è una  $(n-1)$ -superficie orientata in  $\mathbb{R}^n$  e  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo di vettori continuo con  $\Sigma \subseteq A$  aperto definiamo il **flusso di  $v$  attraverso  $\Sigma$**  come

$$\int_\Sigma \langle v, N \rangle.$$

*Osservazione 5.109.*

Il flusso dipende dalla scelta di  $N$ .

*Osservazione 5.110* (Normale Interna ed Esterna).

Se  $\Sigma = \partial U$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  con bordo  $C^1$  (localmente grafico di mappa  $C^1$  di rango massimo) si ha che  $\Sigma$  è orientabile e le scelte sono la **normale esterna**  $N^e(x)$  e la **normale interna**  $N^i(x)$ .

Se  $U = \{f < 0\}$  allora

$$N^e(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

Di solito si sceglie per convenzione la normale esterna.

**Fatto 5.111** (Ipersuperficie senza bordo chiusa è orientabile).

Una ipersuperficie senza bordo chiusa è orientabile.

**Definizione 5.112** (Divergenza).

Dato un campo di vettori  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiamo la sua **divergenza** come

$$\operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

*Osservazione 5.113* (La divergenza del gradiente è il Laplaciano).

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Osserviamo che

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla f)_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \Delta f.$$

**Definizione 5.114** (Partizione dell'unità).

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\{U_i\}_{i \in I}$  un suo ricoprimento. Un insieme  $\{\eta_i\}_{i \in I}$  di funzioni è una **partizione dell'unità** (relativa al ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$ ) se

- $\eta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  di classe  $C^1$
- per ogni  $x \in U$  solo un numero finito delle  $\eta_i$  è non nullo, inoltre

$$\sum_{j \in I} \eta_j(x) = 1$$

- per ogni  $i \in I$ ,  $\operatorname{supp} \eta_i \subseteq U_i$ .

**Teorema 5.115** (Teorema della Divergenza).

Sia  $\Sigma = \partial U$  una ipersuperficie orientabile  $C^1$  (eventualmente  $C^1$  a tratti) con  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto limitato. Se  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  è un campo di vettori di classe  $C^1$  con  $\bar{U} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto allora

$$\int_{\Sigma} \langle v, N^e \rangle = \int_U \operatorname{div}(v)(x) dx.$$

*Dimostrazione.*

Separiamo la dimostrazione in quattro passi, imponendo alcune ipotesi nei primi casi per poi allentarle gradualmente. Indichiamo le coordinate su  $\mathbb{R}^n$  con  $x' = x_1, \dots, x_{n-1}$  e  $y$ , dove  $x'$  sono coordinate su  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

*Primo passo*) Fissiamo  $(x'_0, y_0) \in \Sigma$ . Supponiamo che esista un cilindro  $C = B_r(x'_0) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  tale che per qualche  $f : B_r(x'_0) \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  di classe  $C^1$  si abbia  $\Sigma \cap C = \Gamma_f$ . Supponiamo inoltre che  $v(x) = u(x)e_n$  con  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  a supporto in  $C$ .

Sotto queste ipotesi si ha che

$$\operatorname{div}(v)(x', y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x', y),$$

e che

$$N^e = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla f \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che  $C$  è aperto in quanto prodotto di aperti, dunque  $C \cap \partial C = \emptyset$ . Dato che  $\operatorname{supp} u \subseteq C$  si ha anche che  $\operatorname{supp} u \cap \partial C = \emptyset$ , cioè  $\forall x \in \partial C$  si ha  $u(x) = 0$ . Calcoliamo ora l'integrale della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_U \operatorname{div}(v) \stackrel{\operatorname{supp} u \subseteq C}{=} \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{B_r(x'_0)} \int_{y_0 - \varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y} dy dx' = \\ &= \int_{B_r(x'_0)} u(x', f(x')) - \cancel{u(x', y_0 - \varepsilon)} dx' \stackrel{J_f = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}}{=} \\ &= \int_{\Gamma_f} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} d\Gamma_f \stackrel{\Sigma \cap C = \Gamma_f}{=} \\ &= \int_{\Sigma \cap C} u e_n \cdot N^e = \int_{\Sigma} v \cdot N^e, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio e per la cancellazione abbiamo usato il fatto che  $\text{supp } u \subseteq C$ .  
*Secondo passo*) Fissiamo  $x_0 \in \Sigma$  e supponiamo che esista  $R$  tale che  $\text{supp } v \subseteq B_R(x_0)$  e che per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  esiste  $f_i : e_i^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\Sigma \cap B_R(x_0) = \Gamma_{f_i}$$

dove il grafico è pensato con variabile dipendente lungo  $e_i$  (nel caso generale potremmo fare questa ipotesi restringendo  $R$  se la normale in  $x_0$  non è parallela a nessun  $e_i$ ).  
 Scrivendo  $v = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ , la tesi vale in questo caso per il seguente calcolo:

$$\int_U \text{div}(v) = \int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \int_U \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \int_\Sigma u_i e_i \cdot N^e = \int_\Sigma v \cdot N^e,$$

dove la penultima uguaglianza è una applicazione del passo precedente.

*Terzo passo*) Supponiamo nuovamente che  $\text{supp } v \subseteq B_R(x_0)$  per un fissato  $x_0$  e un qualche  $R > 0$ . Supponiamo anche che  $N^e(x_0) = \pm e_i$  per qualche  $i \in \{1, \dots, n\}$  (senza perdita di generalità  $N^e(x_0) = e_i$ ).

Sia  $L \in O(n, \mathbb{R})$  una matrice ortogonale tale che  $LN^e(x_0)$  NON è parallelo a  $e_j$  per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_U \text{div}(v) &\stackrel{\text{supp } v \subseteq B_R(x_0)}{=} \int_{B_R(x_0) \cap U} \text{div}(v) dx \stackrel{\text{camb.var.}}{=} \\ &= \int_{L(B_R(x_0) \cap U)} \text{div}(v(L^{-1}y)) \underbrace{\sqrt{\det((L^{-1})^\top L^{-1})}}_{=1} dy \stackrel{\text{passo 2}}{=} \\ &= \int_{L(\Sigma)} \langle v(L^{-1}y), N^e(L^{-1}y) \rangle \stackrel{\text{camb.var.}}{=} \\ &= \int_\Sigma \langle v(x), N^e(x) \rangle \underbrace{\sqrt{\det(L^\top L)}}_{=1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili  $x = L^{-1}y$  e il fatto che  $L^\top L = I$ .

*Caso generale*) Dato che  $\Sigma$  è  $C^1$ , per il **Teorema delle funzioni implicite** abbiamo che per ogni  $x \in \Sigma$  esiste  $r_x > 0$  tale che  $\Sigma \cap B_{r_x}(x)$  è grafico di una funzione  $C^1$ . Dato che  $U$  è limitato,  $\Sigma$  è compatto, quindi il ricoprimento sopracitato ammette un numero di Lebesgue  $R > 0$ . Se consideriamo ora il ricoprimento dato da  $\{B_R(x)\}_{x \in \Sigma}$  ha comunque la proprietà che  $B_R(x) \cap \Sigma$  è un grafico, infatti basta considerare un elemento del ricoprimento precedente che conteneva  $B_R(x)$  e restringere quella funzione. Finalmente per compattezza possiamo trovare  $x_1, \dots, x_N \in \Sigma$  tali che  $\Sigma \subseteq \bigcup_{i=1}^N B_R(x_i)$  e  $\Sigma \cap B_R(x_i)$  grafico.

Sia  $\{\eta_i\}_{i \in \{0, \dots, N\}}$  una partizione di unità relativa a  $\{U\} \cup \{B_R(x_i)\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$ , cioè tale che  $\text{supp } \eta_i \subseteq B_R(x_i)$  e  $\text{supp } \eta_0 \subseteq \Sigma \subseteq \bar{U}$ . Per definizione di partizione dell'unità si ha che

$$v = \sum_{i=0}^N v \eta_i, \quad \text{supp}(v \eta_i) \subseteq B_R(x_i).$$

Osserviamo che

$$\text{div}(v) = \sum_{i=0}^N \text{div}(v) \eta_i,$$

e che

$$\int_U \text{div}(v \eta_0) \stackrel{w = v \eta_0 \chi_U}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \text{div}(w) = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx \stackrel{\text{F.T.}}{=} \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx_i}_{=0 \text{ per } i=j} = 0,$$

infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} dx_j = w_j \Big|_{-\infty}^{+\infty} \stackrel{\text{supporto limitato}}{=} 0 - 0 = 0.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_U \operatorname{div}(v) &= \sum_{i=0}^N \int_U \operatorname{div}(v\eta_i) = \sum_{i=1}^N \int_U \operatorname{div}(v\eta_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma} \langle v\eta_i, N^e \rangle = \int_{\Sigma} \langle v, N^e \rangle. \end{aligned}$$

□

*Osservazione 5.116.*

Se considero  $v = \nabla f$  con  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , allora per  $A \supseteq \bar{U}$ ,  $\Sigma = \partial U$  si ha

$$\int_{\partial U} \langle \nabla f, N^e \rangle = \int_U \operatorname{div}(\nabla f) = \int_U \Delta f.$$

### 5.6.1 Integrali di armoniche su palle

**Lemma 5.117** (Integrale su palla in funzione del raggio).

Sia  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  e definiamo

$$J(r) = \int_{B_r(0)} u(x) dx.$$

Allora  $J(r) = \omega_n r^n u(0) + \frac{\omega_n}{2n+4} \Delta u(0) r^{n+2} + o(r^{n+2})$ .

*Dimostrazione.*

Come risultato preliminare osserviamo che

$$\int_{B_r(0)} |x|^2 dx \stackrel{\text{radiale}}{=} \int_0^r t^2 n \omega_n t^{n-1} dt = \frac{n \omega_n}{n+2} r^{n+2}.$$

Sviluppiamo  $u$  con Taylor (2.39)

$$\begin{aligned} u(x) &= u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} x^\top H_u(0) x + o(|x|^2) = \\ &= u(0) + \nabla u(0) \cdot x + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) x_i x_j + o(|x|^2). \end{aligned}$$

Segue che

$$J(r) = \omega_n r^n u(0) + \underbrace{\int_{B_r(0)} \nabla u(0) \cdot x dx}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(0) \int_{B_r(0)} x_i x_j dx + o(r^{n+2})$$

dove  $\int_{B_r(0)} \nabla u(0) \cdot x dx$  si annulla perché integrale di una dispari su un dominio simmetrico e l' $o$ -piccolo è stato ottenuto grazie all'osservazione preliminare. Per sviluppare il termine derivante dall'Hessiana osserviamo che

$$\int_{B_r(0)} x_i x_j dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \int_{B_r(0)} x_i^2 dx & i = j \end{cases}$$

Possiamo sviluppare il caso  $i = j$  come

$$\int_{B_r(0)} x_i^2 dx = \frac{1}{n} \int_{B_r(0)} |x|^2 dx = \frac{1}{n} \frac{n \omega_n}{n+2} r^{n+2}.$$

Possiamo quindi concludere osservando che

$$\begin{aligned} J(r) &= \omega_n r^n u(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\omega_n}{n+2} r^{n+2} + o(r^{n+2}) = \\ &= \omega_n r^n u(0) + \frac{\omega_n}{2n+4} r^{n+2} \Delta u(0) + o(r^{n+2}). \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.118.**

Siano  $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  dominio regolare e  $\varphi \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$  iniettiva tale che  $|\varphi| = 1$  e  $J_\varphi > 0$ .<sup>10</sup> Sia<sup>11</sup>

$$\Phi : \begin{array}{ccc} [0, R] \times Q & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (r, u) & \longmapsto & r\varphi(u) \end{array} .$$

Sia  $C = \Phi([0, R] \times Q)$ . Si ha che

$$\int_C f(x) dx = \int_0^R \int_{C(r)} f dx dr, \quad \text{con } C(r) = C \cap \partial B_r(0).$$

*Dimostrazione.*

Parametrizzando  $C = \Phi([0, R] \times Q)$  scriviamo

$$\int_C f(x) dx = \int_{[0, R] \times Q} f \circ \Phi J_\Phi dr du = \int_{[0, R] \times Q} f(r\varphi(u)) \det |\mathcal{D}\Phi(r, u)| dr du.$$

Calcoliamo  $\det |\mathcal{D}\Phi(r, u)|$ :

$$\begin{aligned} \Phi(r, u) &= \begin{pmatrix} r\varphi_1(u) \\ \vdots \\ r\varphi_n(u) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}\Phi(r, u) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(u) & r\partial_{u_1}\varphi_1(u) & \cdots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_1(u) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_n(u) & r\partial_{u_1}\varphi_n(u) & \cdots & r\partial_{u_{n-1}}\varphi_n(u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $|\det \mathcal{D}\Phi| = \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi^\top \mathcal{D}\Phi)}$ , quindi proviamo a calcolare la seconda espressione. Osserviamo che  $\partial_{u_i}\varphi$  è un movimento tangente alla sfera e  $\varphi$  è radiale, quindi sono ortogonali, cioè  $\langle \partial_{u_i}\varphi, \varphi \rangle = 0$ . Si ha perciò che

$$\mathcal{D}\Phi^\top \mathcal{D}\Phi = \begin{pmatrix} |\varphi|^2 & & & 0 \\ 0 & (r^2 \partial_{u_i}\varphi \cdot \partial_{u_j}\varphi)_{i,j \in \{1, \dots, n-1\}} & & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & r^2 \mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi & & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

dunque  $\sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi^\top \mathcal{D}\Phi)} = \sqrt{\det |r^2 \mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi|} = \sqrt{(r^2)^{n-1} J_\varphi(u)}$ . Sostituendo quanto trovato nell'espressione trovata all'inizio si ha

$$\begin{aligned} \int_C f(x) dx &= \int_{[0, R] \times Q} f(r\varphi(u)) r^{n-1} J_\varphi(u) dr du \stackrel{\text{F.T.}}{=} \\ &= \int_0^R \int_Q f(r\varphi(u)) r^{n-1} J_\varphi(u) du dr = \\ &= \int_0^R \int_{\varphi(Q)} f(ru) r^{n-1} du dr \stackrel{x=r\varphi(u)}{=} \\ &= \int_0^R \int_{C(r)} f(x) dx dr, \end{aligned}$$

come voluto. □

<sup>10</sup> $\varphi$  parametrizza una porzione di sfera unitaria.

<sup>11</sup> $\Phi$  parametrizza il cono generato da  $\varphi(Q)$  di altezza circa  $R$

**Proposizione 5.119** (Integrazione per gusci sferici).

Per  $p \in \mathbb{R}^n$  fissato, posto  $s(r) = \{|x - p| = r\}$ , si ha

$$\int_{B_R(p)} f(x) dx = \int_0^R \int_{s(r)} f(x) dx dr.$$

*Dimostrazione.*

Scriviamo  $B_R(0) = \bigcup C_j$  con  $C_j$  coni con intersezioni di misura nulla. Osserviamo che  $\bigcup C_j(r) = \partial B_r(0)$ . Da questo segue che

$$\int_{B_R(0)} f dx = \sum_j \int_{C_j} f dx = \sum_j \int_0^R \int_{C_j(r)} f dx dr = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f dx dr,$$

dove per l'uguaglianza centrale abbiamo usato il lemma. □

**Proposizione 5.120** (Principio della media per funzioni armoniche).

Data  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  sono equivalenti le seguenti condizioni:

1.  $\Delta f(p) = 0$  per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$  ( $f$  è armonica)
2. Per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ , per ogni  $r \in (0, 1]$

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(p)} f = f(p),$$

dove  $\omega_n = |B_1(p)|_{\mathbb{R}^n}$ .<sup>12</sup>

3. Per ogni  $p \in \mathbb{R}^n$ , per ogni  $r \in (0, 1]$

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} f = f(p).$$

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $p = 0$ . Definiamo la seguente funzione

$$\mu(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f$$

e mostriamo che

$$\mu(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} f_r,$$

dove  $f_r(x) = f(rx)$ .

Separiamo la sfera tramite due carte  $\varphi_1 : Q_1 \rightarrow \partial B_1(0)$ ,  $\varphi_2 : Q_2 \rightarrow \partial B_1(0)$ :

$$\int_{\partial B_1} f_r = \int_{\varphi_1(Q_1)} f_r + \int_{\varphi_2(Q_2)} f_r.$$

Concentriamoci su uno dei pezzi e tralasciamo i pedici. Osserviamo che

$$\mathcal{D}\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1 & \cdots & \partial_{n-1} \varphi_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n & \cdots & \partial_{n-1} \varphi_n \end{pmatrix},$$

da cui

$$(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi)_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

<sup>12</sup>Moralmente la media dei valori che una armonica assume sul bordo di una sfera è il valore che assume nel centro.

Definendo  $\psi(x) = r\varphi(x)$ , osserviamo che

$$(\mathcal{D}\psi^\top \mathcal{D}\psi)_{ij} = r^2(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi)_{ij},$$

dunque

$$\det(\mathcal{D}\psi^\top \mathcal{D}\psi) = r^{2(n-1)} \det(\mathcal{D}\varphi^\top \mathcal{D}\varphi) \implies J_\psi = r^{n-1} J_\varphi.$$

Si ha dunque che

$$\int_{\varphi(Q)} f_r = \int_Q f_r(\varphi(u)) J_\varphi(u) du = \int_Q f(\psi(u)) \frac{J_\psi(u)}{r^{n-1}} du = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} f.$$

Ricomponendo le carte si ha

$$\int_{\partial B_1(0)} f_r = \int_{\varphi_1(Q_1)} f_r + \int_{\varphi_2(Q_2)} f_r = \frac{1}{r^{n-1}} \left( \int_{\psi_1(Q_1)} f + \int_{\psi_2(Q_2)} f \right) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} f$$

che, dividendo per  $n\omega_n$ , è l'uguaglianza che cercavamo di giustificare.

Cerchiamo ora di calcolare la derivata di  $\mu$  rispetto a  $r$ . Come prima separiamo la sfera in carte:

$$\mu_Q(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\varphi(Q)} f_r = \frac{1}{n\omega_n} \int_Q f_r(\varphi(u)) J_\varphi(u) du.$$

Derivando troviamo

$$\begin{aligned} \mu'_Q(r) &= \frac{1}{n\omega_n} \int_Q \frac{\partial}{\partial r} f(r\varphi(u)) \underbrace{J_\varphi(u)}_{\text{indip. da } r} du = \\ &= \frac{1}{n\omega_n} \int_Q \nabla f(\underbrace{r\varphi(u)}_{=\psi(u)}) \cdot \varphi(u) \frac{J_\psi(u)}{r^{n-1}} du = \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\psi(Q)} \nabla f \cdot N^e \end{aligned}$$

dove  $N^e(\psi(u)) = \frac{\psi(u)}{|\psi(u)|} = \frac{r\varphi(u)}{r} = \varphi(u)$ , infatti la normale esterna di un guscio sferico in un punto ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore con coda nel centro e vertice in quel punto. Ricomponendo le carte

$$\mu'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} \nabla f \cdot N^e.$$

Siamo ora pronti per mostrare le equivalenze:

1  $\implies$  2) Se  $\Delta f = 0$  allora

$$\mu'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(0)} \nabla f \cdot N^e \stackrel{\text{divg.}}{=} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \underbrace{\text{div}(\nabla f)}_{=\Delta f} dx = 0,$$

dunque  $\mu(r)$  è costante. Per il lemma (5.117) si ha che  $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(r) = f(0)$ , quindi la costante è proprio  $f(0)$  e abbiamo la tesi.

2  $\implies$  1) Osserviamo che  $\mu(r)$  costante implica  $\mu'(r) = 0$ , dunque

$$0 = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(0)} \Delta f dx \stackrel{(5.117)}{=} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} (\omega_n r^n \Delta f(0) + o(r^{n+1})) = \frac{r}{n} \Delta f(0) + o(r^2).$$

Dividendo per  $r$ , moltiplicando per  $n$  e poi calcolando il limite per  $r \rightarrow 0$  troviamo  $\Delta f(0) = 0$ .

3  $\implies$  1) Supponiamo che

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} f = f(p).$$

Posto  $\bar{f}(x) = f(x) - f(p)$ , abbiamo

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} \bar{f} = 0,$$

ma

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(p)} \bar{f} = \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \left( \underbrace{\omega_n r^n \bar{f}(p)}_{=f(p)-f(p)=0} + \frac{\omega_n}{2n+4} r^{n+2} \Delta f(p) + o(r^{n+2}) \right) = \\ &= \frac{1}{2n+4} r^2 \Delta f(p) + o(r^2). \end{aligned}$$

Dividendo per  $r^2$  e poi calcolando il limite per  $r \rightarrow 0$  troviamo  $\Delta f(p) = 0$ .

2  $\implies$  3) Usando l'integrazione per gusci sferici (5.119) sulla tesi del punto 2 si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(p)} f(x) dx &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_0^R \int_{\partial B_r(p)} f dx dr = \\ &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_0^R f(p) n \omega_n r^{n-1} dr = \\ &= \frac{n \omega_n}{\omega_n R^n} \frac{1}{n} R^n f(p) = f(p). \end{aligned}$$

□

## 5.7 Integrali su superfici nello spazio tridimensionale

Facciamo alcune considerazioni sugli integrali che riguardano superfici embedded in  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo quindi  $\Sigma = \varphi(D)$  con  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  dominio regolare,  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$  iniettiva tale che  $\bar{D} \subseteq A$  e  $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi) = 2$ .

### Notazione 5.121.

In questa sezione, per non confondere le coordinate di  $\mathbb{R}^3$  e di  $\mathbb{R}^2$  adottiamo la seguente convenzione:  $x, y, z$  indicano le coordinate canoniche in  $\mathbb{R}^3$ ,  $u, v$  indicano le coordinate canoniche in  $\mathbb{R}^2$ . Spesso “ $x$ ” sarà anche un vettore generico. Spero di aver reso abbastanza chiaro da contesto i ruoli.

*Osservazione 5.122.*

Si ha che

$$\text{rk}(\mathcal{D}\varphi) = 2 \iff \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0.$$

*Osservazione 5.123.*

Possiamo definire una orientazione canonica di  $\Sigma$  come

$$N(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x) \right|},$$

infatti è continua e di norma 1, inoltre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \in \text{Span} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^\perp = T_x \Sigma^\perp.$$

Non necessariamente questa scelta corrisponde alla normale esterna. Dipende dalla scelta di parametrizzazione.

*Osservazione 5.124* (Integrale sulla superficie).

Se  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  è continua si ha che

$$\int_{\Sigma} f = \int_D f(\varphi(u, v)) J_{\varphi} du dv \stackrel{J_{\varphi} = |\varphi_u \times \varphi_v|}{=} \int_D f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right| du dv.$$

*Osservazione 5.125* (Flusso attraverso superficie).

Sia  $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo di vettori continuo. Usando l'orientazione descritta prima, cioè

$$N(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x) \right|},$$

si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle F, N \rangle &= \int_D \left\langle F(\varphi), \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|} \right\rangle \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| = \\ &= \int_D \left\langle F(\varphi(u, v)), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle du dv \end{aligned}$$

*Osservazione 5.126* (Orientazione indotta dall'orientazione in  $\mathbb{R}^2$ ).

Ricordiamo che possiamo munire  $\partial D$  di un orientamento se  $D \subseteq \mathbb{R}^+$  regolare (ottenendo  $\partial^2 D$ ). Applicando  $\varphi$  troviamo un'orientazione di  $\partial \Sigma$ , che indichiamo  $\partial^+ \Sigma$ .

È possibile verificare che per ogni  $x \in \partial \Sigma$

- $T \times N \in T_x \Sigma$
- $T \times N$  punta sempre “fuori” da  $\Sigma$  (in una direzione ortogonale a  $\partial \Sigma$ ),

dove  $T$  è l'immagine del vettore tangente a  $\partial^+ D$  tramite  $\varphi$  e  $N$  è (il limite della) normale canonica che deriva dalla parametrizzazione di  $\Sigma$  tramite  $\varphi$  nel punto che stiamo considerando<sup>13</sup>.

Si da il caso che se  $(\Sigma, N)$  è una superficie orientata in  $\mathbb{R}^3$  possiamo definire l'orientazione positiva  $\partial^+ \Sigma$  ponendo che per un vettore  $T$  “tangente” al bordo valgano le due condizioni sopra.

### 5.7.1 Teorema di Stokes

**Definizione 5.127** (Rotore).

Dato un campo di vettori  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$  definiamo il suo **rotore** come

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix} \quad “=” \nabla \times F.$$

**Teorema 5.128** (Teorema di Stokes).

Data una superficie orientata  $(\Sigma, N)$  in  $\mathbb{R}^3$  compatta di classe  $C^1$  e dato un campo di vettori  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$  con  $\Sigma \subseteq A$  aperto, si ha che

$$\int_{\Sigma} \langle \text{rot}(F), N \rangle = \int_{\partial^+ \Sigma} F.$$

*Dimostrazione.*

*Parametrizzazione semplice*) Consideriamo dapprima il caso  $\Sigma = \varphi(\overline{D})$  con  $\varphi : \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  iniettiva e  $D$  dominio regolare in  $\mathbb{R}^2$ . Supponiamo inoltre che  $\varphi \in C^2$ , infatti

<sup>13</sup> $N = \partial_u \varphi \times \partial_v \varphi$

possiamo approssimare ogni funzione  $\varphi \in C^1$  a partire da funzioni  $C^2$  in modo che gli integrali convergano.<sup>14</sup> Come notazione poniamo

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ F(x, y, z) &= (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)).\end{aligned}$$

Per aumentare la leggibilità scriveremo un pedice per indicare le derivate parziali, per esempio  $Z_y = \frac{\partial Z}{\partial y}$ .

Ricordiamo le seguenti espressioni per  $\varphi_u \times \varphi_v$ , lo Jacobiano di  $\varphi$  (5.99) e il vettore normale (5.123):

$$\begin{aligned}\varphi_u \times \varphi_v &= \begin{pmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ z_u x_v - z_v x_u \\ x_u y_v - x_v y_u \end{pmatrix}, \\ J_\varphi &= |\varphi_u \times \varphi_v|, \quad N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}.\end{aligned}$$

Calcoliamo anche il rotore di  $F$ .

$$\text{rot}(F) = \begin{pmatrix} Z_y - Y_z \\ X_z - Z_x \\ Y_x - X_y \end{pmatrix}.$$

Per mostrare la tesi calcoliamo separatamente il flusso del rotore e l'integrale lungo il bordo di  $\Sigma$ , verificando che coincidono:

primo integrale)

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \text{rot}(F) \cdot N &= \int_D (\text{rot}(F)) \circ \varphi \cdot (\varphi_u \times \varphi_v) dudv = \\ &= \int_D (Z_y - Y_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (X_z - Z_x)(z_u x_v - z_v x_u) + \\ &\quad + (Y_x - X_y)(x_u y_v - x_v y_u) dudv.\end{aligned}$$

secondo integrale) Parametizziamo  $\partial^+ D$  tramite la curva  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  per  $t \in [0, 1]$ . Osserviamo che  $\partial\Sigma = \varphi(\partial D)$  è parametrizzato da

$$\varphi(\gamma(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))).$$

Da questa espressione segue che

$$\frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} x_u u' + x_v v' \\ y_u u' + y_v v' \\ z_u u' + z_v v' \end{pmatrix}.$$

<sup>14</sup>Questo segue per esempio considerando delle convoluzioni. Per un'idea simile con  $L^1$  al posto di  $C^1$  si consideri (4.85).

Premesso questo possiamo calcolare  $\int_{\partial^+\Sigma} F$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+\Sigma} F &= \int_0^1 F(\varphi(\gamma(t))) \cdot \frac{d\varphi(\gamma(t))}{dt} dt = \\
&= \int_0^1 (Xx_u + Yy_u + Zz_u)u' + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)v' dt = \\
&= \int_{\partial^+D} (Xx_u + Yy_u + Zz_u)du + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)dv \stackrel{\text{G.G.}}{=} \\
&= \int_D \frac{\partial}{\partial u}(Xx_v + Yy_v + Zz_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Xx_u + Yy_u + Zz_u)dudv = \\
&= \int_D (X_x x_u x_v + X_y y_u x_v + X_z z_u x_v + X x_{uv}) + \\
&\quad + (Y_x x_u y_v + Y_y y_u y_v + Y_z z_u y_v + Y y_{uv}) + \\
&\quad + (Z_x x_u z_v + Z_y y_u z_v + Z_z z_u z_v + Z z_{uv}) + \\
&\quad - (X_x x_v x_u + X_y y_v x_u + X_z z_v x_u + X x_{vu}) + \\
&\quad - (Y_x x_v y_u + Y_y y_v y_u + Y_z z_v y_u + Y y_{vu}) + \\
&\quad - (Z_x x_v z_u + Z_y y_v z_u + Z_z z_v z_u + Z z_{vu})dudv \stackrel{\text{Cancellazioni}}{=} \\
&= \int_D (Z_y - Y_z)(y_u z_v - y_v z_u) + (X_z - Z_x)(z_u x_v - z_v x_u) + \\
&\quad + (Y_x - X_y)(x_u y_v - x_v y_u)dudv,
\end{aligned}$$

che è l'espressione che avevamo trovato prima per il flusso del rotore. Per identificare  $x_{uv}$  con  $x_{vu}$  e simili manipolazioni abbiamo usato l'ipotesi che sia tutto  $C^2$  in modo da poter applicare il **Teorema di Schwarz**.

*Caso generale*) Scriviamo  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\overline{D})$ , con  $\varphi_i(D) \cap \varphi_j(D) = \emptyset$  per  $i \neq j$ . Osserviamo che per i punti in  $\varphi_i(\overline{D}) \subseteq \Sigma$  si ha che

$$N_i = \frac{(\varphi_i)_u \times (\varphi_i)_v}{|(\varphi_i)_u \times (\varphi_i)_v|}$$

è un campo di vettori normali su  $\varphi_i(\overline{D})$ . Dato che  $\Sigma$  è una superficie  $C^1$  si ha che sui bordi  $\varphi_i = \varphi_j$ , dunque gli  $N_i$  si estendono ad un  $N$  campo di vettori normale continuo su  $\Sigma$ . Osserviamo dunque che

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \text{rot}(F) \cdot N &= \sum_{i=1}^N \int_{\varphi_i(\overline{D})} \text{rot}(F) \cdot N_i = \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial^+\varphi_i(\overline{D})} F = \int_{\partial^+\Sigma} F,
\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dal caso trattato sopra e l'ultima segue dal fatto che

$$\int_{\partial^+\varphi_i(\overline{D}) \cap \partial\varphi_j(\overline{D})} F = - \int_{\partial^+\varphi_j(\overline{D}) \cap \partial\varphi_i(\overline{D})} F,$$

cioè sulle intersezioni dei bordi delle carte le orientazioni delle stesse sono opposte, dunque i termini si cancellano e rimangono solo i termini che costituiscono  $\partial^+\Sigma$ .  $\square$

## 5.7.2 Nabla-calcolo

### Notazione 5.129.

Per alleggerire la notazione, in questa sezione scriveremo  $\partial_x$  al posto di  $\frac{\partial}{\partial x}$  e similmente per  $y$  e  $z$ .

È possibile esprimere Gradiente, Divergenza e Rotore tramite regole formali che coinvolgono

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix},$$

che come simbolo viene chiamato **nabla**. Queste regole sono le seguenti:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}, \quad \nabla \cdot F = \operatorname{div}(F) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3,$$

$$\nabla \times F = \operatorname{rot}(F) = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}.$$

Il “nabla-calcolo” è quindi una collezione di risultati che accomunano questi tre concetti.

**Proposizione 5.130** (Rotore del gradiente e divergenza del rotore).

Siano  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^2$  con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , allora

- $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$
- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ .

*Dimostrazione.*

★) Calcolando

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z \varphi - \partial_z \partial_y \varphi \\ \partial_z \partial_x \varphi - \partial_x \partial_z \varphi \\ \partial_x \partial_y \varphi - \partial_y \partial_x \varphi \end{pmatrix} \stackrel{\text{Schwarz}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

★) Osservando che

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix},$$

si ha che

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \partial_x \partial_y F_3 - \partial_x \partial_z F_2 + \partial_y \partial_z F_1 - \partial_y \partial_x F_3 + \partial_z \partial_x F_2 - \partial_z \partial_y F_1 \stackrel{\text{Schwarz}}{=} 0$$

□

*Osservazione 5.131* (Campi irrotazionali/con potenziale e forme chiuse/esatte).

Ricordando la definizione di campo associato ad una forma e forma associata ad un campo si ha che le seguenti sono affermazioni equivalenti:

“Un campo è irrotazionale se e solo se ammette potenziale.”

“Una forma è chiusa se e solo se è esatta.”

Le affermazioni sono vere per esempio se il dominio di definizione è semplicemente connesso per le proposizioni (5.54) e (5.59), mentre sono false, per esempio, in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ .

**Proposizione 5.132** (Criterio per l'esistenza di un potenziale vettoriale).

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  tale che  $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$  con  $I_i$  intervalli e  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$  tale che  $\nabla \cdot G = 0$ . Allora esiste  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^2$  tale che  $G = \nabla \times F$ .

*Dimostrazione.*

Supponiamo che esista  $F$  come richiesto e cerchiamo di trovarne una realizzazione. Osserviamo che

$$G = \nabla \times F \iff \begin{cases} G_1 = \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ G_2 = \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ G_3 = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{cases}$$

Osserviamo che se  $F$  e  $\tilde{F}$  sono tali che  $\nabla \times F = \nabla \times \tilde{F}$  allora  $\nabla \times (F - \tilde{F}) = 0$  (cioè la forma associata a  $F - \tilde{F}$  è chiusa). Siccome un parallelepipedo è semplicemente connesso, si avrà che  $F - \tilde{F} = \nabla U$  (cioè la forma associata a  $F - \tilde{F}$  è esatta). Proviamo allora a fare la seguente ipotesi nella speranza che non sia troppo stringente:

$$\text{Ansatz: } F_1 = 0.$$

Con questa ipotesi, il sistema sopra diventa

$$\begin{cases} G_1 = \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ G_2 = -\partial_x F_3 \\ G_3 = \partial_x F_2 \end{cases},$$

dunque, fissato  $x_0 \in I_1$ , si deve avere per il teorema fondamentale del calcolo che

$$F_3(x, y, z) - F_3(x_0, y, z) = \int_{x_0}^x \partial_x F_3(t, y, z) dt = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt,$$

da cui, per qualche  $f(y, z)$  si ha

$$F_3 = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt + f(y, z).$$

Con un ragionamento analogo troviamo

$$F_2 = \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt + h(y, z).$$

Facciamo un'ulteriore ipotesi che non dovrebbe essere troppo restrittiva:

$$\text{Ansatz: } f = 0.$$

Per trovare un  $F$  valido ci basterebbe trovare un  $h$  tale che  $G_1 = \partial_y F_3 - \partial_z F_2$ , perché in tal caso ogni equazione del sistema verrebbe rispettata. Poniamo dunque questa condizione sfruttando le espressioni per  $F_2$  e  $F_3$  trovate:

$$\begin{aligned} G_1 &= - \int_{x_0}^x \partial_y G_2(t, y, z) dt - \int_{x_0}^x \partial_z G_3(t, y, z) dt - \partial_z h(y, z) \stackrel{\nabla \cdot G=0}{=} \\ &= \int_{x_0}^x \partial_x G_1(t, y, z) dt - \partial_z h = \\ &= G_1(x, y, z) - G_1(x_0, y, z) - \partial_z h, \end{aligned}$$

segue dunque che

$$\partial_z h = -G_1(x_0, y, z).$$

Fissando  $z_0 \in I_3$  possiamo porre

$$h = - \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, t) dt.$$

Si ha dunque che, presi  $x_0 \in I_1$  e  $z_0 \in I_3$  arbitrari, il seguente campo di vettori è un potenziale vettoriale di  $G$ :

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt - \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, t) dt \\ - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt \end{pmatrix}$$

□

*Osservazione 5.133.*

La proposizione non vale per  $\Omega$  qualsiasi.

**Esempio 5.134.**

Sia  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , allora il campo di vettori

$$G(x, y, z) = \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non ammette potenziale vettoriale, cioè non è rotore di alcun campo.

*Dimostrazione.*

Supponiamo per assurdo che esista  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$  tale che  $G = \nabla \times F$ . Consideriamo per  $a \in (0, 1)$  l'insieme

$$S_a = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq a\},$$

cioè la sfera a cui rimuoviamo i punti di altezza maggiore ad  $a$ . Osserviamo che  $\partial^+ S_a$  è un cerchio di raggio  $\sqrt{1 - a^2}$ , che tende a 0 per  $a \rightarrow 1$ .

Osserviamo che

$$\int_{S_a} G \cdot N^e = \int_{S_a} \nabla \times F \cdot N^e \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial^+ S_a} F.$$

Per  $a \rightarrow 1$  si ha che il membro di destra tende a 0 perché il dominio tende ad un punto, mentre il membro di sinistra tende a  $\int_S G \cdot N^e$ , che con un semplice conto verificiamo valere  $4\pi$ . I due membri hanno quindi limiti diversi, che è assurdo.  $\neq$   $\square$

## 5.8 K-Forme differenziali su spazi reali

Abbiamo visto i teoremi di Gauss-Green, Divergenza e Stokes. Possiamo interpretarli tutti come conseguenze di un unico teorema che dimostreremo nella prossima sezione. Per formulare bene questo teorema abbiamo bisogno delle  $k$ -forme.

Come nel caso delle 1-Forme, dobbiamo prima definire un analogo dei covettori.

**Definizione 5.135** ( $k$ -covettori).

Un  $k$ -**covettore** è una funzione  $\omega : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  multilineare alternante, cioè

- per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\omega$  è **lineare nell' $i$ -esimo argomento**:

$$f(x) = \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_k) \implies f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

- $\omega$  è **alternante**, cioè se  $\sigma \in S_k$  è una permutazione allora

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k).$$

*Osservazione 5.136.*

Se  $v_i = v_j$  per qualche  $i \neq j$  allora

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0.$$

Più in generale, le multilineari alternanti si annullano se sono valutate su un insieme di vettori linearmente dipendente.

**Notazione 5.137.**

Lo spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  dei  $k$ -covettori si indica con  $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ . Definiamo anche il seguente insieme di indici:

$$\Lambda_{n,k} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \lambda_i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_1 < \dots < \lambda_k\}.$$

**Definizione 5.138** (Elementi della base canonica di  $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ ).  
 Dati  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \{1, \dots, n\}$ , poniamo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  e definiamo

$$dx_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge dx_{\lambda_2} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k}$$

come

$$dx_\lambda(v_1, \dots, v_k) = \det(((v_j)_{\lambda_i})_{i,j \in \{1, \dots, k\}}).$$

*Osservazione 5.139.*

L'insieme  $\{dx_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{n,k}\}$  è una base di  $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ . In particolare  $\dim_{\mathbb{R}} \bigwedge_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$ .

*Osservazione 5.140.*

$dx_1, \dots, dx_n$  è una base di  $\bigwedge_1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$ .

$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  è una base di  $\bigwedge_n(\mathbb{R}^n)$ . Questo ci permette di dare la seguente caratterizzazione del determinante:

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(v_1, \dots, v_n) = \det(v_1 \mid \dots \mid v_n).$$

**Definizione 5.141** (Prodotto wedge).

Definiamo il seguente prodotto esterno:

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge_k(\mathbb{R}^n) \times \bigwedge_\ell(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \bigwedge_{k+\ell}(\mathbb{R}^n) \\ \omega, \eta & \longmapsto & \omega \wedge \eta \end{array},$$

dove  $dx_\lambda \wedge dx_\mu = dx_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_k} \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_\ell}$  ed estendiamo il prodotto a  $\bigwedge_k(\mathbb{R}^n) \times \bigwedge_\ell(\mathbb{R}^n)$  imponendo distributività, cioè

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} a_\lambda dx_\lambda, \quad \eta = \sum_{\mu \in \Lambda_{n,\ell}} b_\mu dx_\mu \quad \implies \quad \omega \wedge \eta = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda_{n,k} \\ \mu \in \Lambda_{n,\ell}}} a_\lambda b_\mu dx_\lambda \wedge dx_\mu.$$

Chiamiamo questo il **prodotto wedge**.

**Proposizione 5.142** (Proprietà del prodotto wedge).

*Il prodotto esterno wedge rispetta le seguenti proprietà:*

*Dati  $a, a' \in \bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $b \in \bigwedge_\ell(\mathbb{R}^n)$ ,  $h \in \bigwedge_h(\mathbb{R}^n)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha che*

- $(a + a') \wedge b = a \wedge b + a' \wedge b$ ,
- $\alpha(a \wedge b) = (\alpha a) \wedge b$ ,
- $a \wedge b = (-1)^{\lfloor \frac{k+\ell}{2} \rfloor + \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (b \wedge a) = (-1)^{k\ell} (b \wedge a)$ ,
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ .

*Osservazione 5.143.*

Il prodotto wedge è bilineare. Questo segue immediatamente dai primi tre punti della proposizione precedente.

**Definizione 5.144** ( $k$ -forme differenziali).

Dato  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, una  $k$ -**forma differenziale** è una funzione  $\omega : A \rightarrow \bigwedge_k(\mathbb{R}^n)$ . Possiamo rappresentare  $\omega$  nella base canonica con

$$\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} \omega_\lambda(x) dx_\lambda, \quad \text{con } \omega_\alpha : A \rightarrow \mathbb{R}.$$

Poniamo  $\Omega^k(A) = \{\omega : A \rightarrow \bigwedge_k(\mathbb{R}^n) \mid \omega \text{ } k\text{-forma differenziale.}\}$

*Osservazione 5.145.*

L'insieme  $\Omega^k$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

*Osservazione 5.146.*

Il prodotto esterno  $\wedge$  sui covettori induce un prodotto esterno (che denotiamo sempre con  $\wedge$ ) sulle forme differenziali.

**Definizione 5.147** (Differenziale esterno).

Data  $\omega$  una  $k$ -forma differenziale di classe  $C^1$ , cioè  $\omega = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} dx_{\lambda}$  con  $\omega_{\lambda} \in C^1(A, \mathbb{R})$ , definiamo il suo **differenziale** come la  $(k+1)$ -forma data da

$$d\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda_{n,k}} d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda}, \quad \text{con } d\omega_{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i.$$

L'operatore  $d$  è detto **differenziale esterno**.

**Proposizione 5.148** (Proprietà del differenziale esterno).

Se  $\omega_1, \omega_2, a$  sono  $k$ -forme differenziali di classe  $C^1$ ,  $b$  una  $\ell$ -forma differenziale di classe  $C^1$  e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , si ha che

- $d(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1d\omega_1 + c_2d\omega_2$
- $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^k a \wedge db$
- $d^2a = d(da) = 0$  se  $a$  è di classe  $C^2$ .

*Dimostrazione.*

\*) Linearità della derivata.

\*) Se  $a = \sum a_{\lambda} dx_{\lambda}$  e  $b = \sum b_{\mu} dx_{\mu}$  allora

$$a \wedge b = \sum_{\lambda, \mu} a_{\lambda} b_{\mu} dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu},$$

dunque

$$\begin{aligned} d(a \wedge b) &= \sum_{\lambda, \mu} (da_{\lambda} b_{\mu} + a_{\lambda} db_{\mu}) \wedge (dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu}) = \\ &= \sum_{\lambda, \mu} da_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} \wedge b_{\mu} dx_{\mu} + a_{\lambda} db_{\mu} \wedge dx_{\lambda} \wedge dx_{\mu} = \\ &= \sum_{\lambda, \mu} (da_{\lambda} \wedge dx_{\lambda}) \wedge (b_{\mu} dx_{\mu}) + (-1)^k \sum_{\lambda, \mu} (a_{\lambda} dx_{\lambda}) \wedge (db_{\mu} \wedge dx_{\mu}) = \\ &= da \wedge b + (-1)^k a \wedge db. \end{aligned}$$

\*) Osservo che per ogni  $\lambda$ ,  $d(dx_{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial 1}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{\lambda} = \sum 0 dx_i \wedge dx_{\lambda}$ .

Se  $\omega_{\lambda} \in C^2(A, \mathbb{R})$ ,  $d\omega_{\lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i$ , dunque

$$\begin{aligned} d^2\omega_{\lambda} &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{\lambda}}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = \\ &= \sum_{i,j} \left( \underbrace{\frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega_{\lambda}}{\partial x_j \partial x_i}}_{=0} \right) dx_i \wedge dx_j = 0 \end{aligned}$$

Per concludere

$$d^2\omega = d \sum_{\lambda} d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda} = \sum_{\lambda} d(d\omega_{\lambda} \wedge dx_{\lambda}) = \sum_{\lambda} (\underbrace{d^2\omega_{\lambda}}_{=0} \wedge dx_{\lambda} + d\omega_{\lambda} \wedge \underbrace{d^2x_{\lambda}}_{=0}) = 0.$$

□

**Definizione 5.149** ( $k$ -forma esatta / chiusa).

Una  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k$  è **esatta** se  $\omega = d\omega'$  per  $\omega' \in \Omega^{k-1}$  ed è **chiusa** se  $d\omega = 0$ .

*Osservazione 5.150.*

Se  $\omega \in C^1$  è esatta allora è chiusa per (5.148).

*Osservazione 5.151.*

Le forme chiuse / esatte sono sottospazi di  $\Omega^k$ .

**Definizione 5.152** (Gruppi di coomologia).

Poniamo

$$H^k(A) = H_{dR}^k(A) = \{\omega \in \Omega^k(A) \mid \omega \text{ chiusa}\} / \{\omega \in \Omega^k(A) \mid \omega \text{ esatta}\},$$

che chiamiamo  $k$ -esimo gruppo di coomologia (di De-Rham) di  $A$  (a coefficienti in  $\mathbb{R}$ ).

*Osservazione 5.153.*

Se  $A$  è semplicemente connesso,  $H^1(A) = 0$ .

La questione di come calcolare gli  $H^k$  è oggetto di altri corsi, per esempio Geometria e Topologia Differenziale e Topologia Algebrica.

### 5.8.1 Pullback di una Forma differenziale

Consideriamo il seguente

**Esempio 5.154.**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f \in C^1$  iniettiva e sia  $v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Osserviamo che  $f$  induce un campo di vettori  $w : f(A) \rightarrow \mathbb{R}^m$  dato da

$$w(f(x)) = df(v(x)).$$

**Definizione 5.155** (Pullback di una forma).

Data  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f \in C^1$  iniettiva e  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$  definiamo il **pullback** di  $\omega$  attraverso  $f$  (e scriviamo  $\omega^\sharp = f^*\omega \in \Omega^k(A)$ ) come

$$\omega_x^\sharp(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(x)}(df_x(v_1), \dots, df_x(v_k)).$$

*Osservazione 5.156.*

Se  $\omega \in \Omega^0$ , cioè  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  allora

$$\omega^\sharp = \omega \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

Se  $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ ,  $\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ . Inoltre, se  $n = m$

$$\omega^\sharp = (a \circ f) J_f dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$$

*Osservazione 5.157.*

Fare il pullback rispetta tutte le operazioni che abbiamo definito per le forme (rispetta somma, prodotto esterno e differenziale esterno)

### 5.8.2 K-Superfici Orientabili

**Definizione 5.158** (Orientazioni di un  $k$ -sottospazio vettoriale).

Se  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  è un sottospazio tale che  $\dim V = k$  introduciamo una relazione di equivalenza tra le basi di  $V$ :

Se  $\{h_1, \dots, h_k\}$  e  $\{h'_1, \dots, h'_k\}$  sono basi di  $V$  allora diciamo che

$$\{h_1, \dots, h_k\} \sim \{h'_1, \dots, h'_k\}$$

se  $\det G > 0$ , dove  $G \in GL(n)$  è la matrice del cambio di base tale che  $Gh_i = h'_i$ . Definiamo le **orientazioni** di  $V$  come i due elementi  $V^+, V^-$  di

$$\{\text{basi di } V\} / \sim = \{V^+, V^-\}.$$

Per convenzione  $[\{e_1, \dots, e_k\}]$  si dice **orientazione positiva** di  $\mathbb{R}^k$ .

**Definizione 5.159** ( $k$ -varietà orientabile).

Una  $k$ -varietà  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  si dice **orientabile** se esiste  $f : M \rightarrow \{TM^+, TM^-\}$  continua. Una tale  $f$ , se esiste, si dice **orientazione** di  $M$ .

*Osservazione 5.160.*

NON significa che esiste  $f : M \rightarrow \{\text{base di } T_x M\}$  continua. Per l'orientabilità richiediamo che la mappa sia continua nelle classi delle basi, mentre la richiesta di continuità a immagine nelle basi è molto più stringente (per esempio, neanche le sfere la posseggono).

*Osservazione 5.161.*

Se  $M = \varphi(U)$  con  $\varphi \in C^1$ ,  $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi) = k$ , allora  $M$  è orientabile e  $[\{\mathcal{D}\varphi(e_i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}}]$  ne è un'orientazione.

**Proposizione 5.162.**

Un  $k$ -varietà  $M$  è orientabile se e solo se esistono  $\{\varphi_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$  con  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  iniettive con  $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi_i) = k$  tali che  $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U)$  e

$$\det(\mathcal{D}(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)) > 0.$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

**Proposizione 5.163** (Nuova definizione generalizza il caso delle ipersuperfici).

Se  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  è una  $(n-1)$ -superficie allora  $M$  è orientabile se e solo se esiste una scelta continua di  $N : M \rightarrow (TM)^\perp \setminus \{0\}$ , cioè posso definire un vettore normale.

*Dimostrazione.*

Segue da  $TM^\perp = \text{Span}(N)$  e  $N^\perp = TM$ . □

**Definizione 5.164** ( $k$ -superficie con bordo).

$M$  è una  $k$ -**superficie con bordo** se per ogni  $x \in M$  esistono  $U$  intorno di  $x$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  dominio regolare (con bordo) e  $\varphi_x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  iniettiva con  $\text{rk}(\mathcal{D}\varphi_x) = k$  tali che

$$M \cap \bar{U} = \varphi_x(D).$$

Definiamo il **bordo** di  $M$  come

$$\partial M = \{x_0 \in M \mid \forall x \in M \text{ t.c. } x_0 \in \varphi_x(\bar{U}), x_0 \in \varphi_x(\partial U)\},$$

la quale è una  $(k-1)$ -superficie di classe  $C^1$ .

*Osservazione 5.165* (Orientazione indotta sul bordo).

Se  $M$  orientabile, posso scegliere  $\varphi$  tale che  $[\{d\varphi(e_i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}}]$  sia l'orientazione di  $M$ .

Per ogni  $y \in \partial D$  scelgo  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$  base di  $TD$  tale che  $[\{v_1, \dots, v_{k-1}, N_D(y)\}] = [\{e_1, \dots, e_k\}]$ , dove  $N_D(y)$  è la normale di  $D$  in  $y$ .

Chiamiamo  $[\{v_1, \dots, v_{k-1}\}]$  **l'orientazione positiva**  $\partial^+ D$  di  $\partial D$ .

Questa definisce  $[\{d\varphi(v_i)\}_{i \in \{1, \dots, k\}}]$  orientazione di  $\partial M$ , cioè se  $M$  è orientabile allora  $\partial M$  è orientabile e un'orientazione di  $M$  induce una orientazione di  $\partial M$ .

### 5.8.3 Integrale di k-Forme su k-superfici orientabili e Stokes

**Definizione 5.166** (Integrale).

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Se  $\omega \in \Omega^n(U)$  (e quindi  $\omega = adx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ ) poniamo

$$\int_U \omega = \int_U a.$$

Se  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  e  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  iniettiva con  $\text{rnk}(\mathcal{D}\varphi) = k$ , se  $M = \varphi(U)$  è una  $k$ -superficie e  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$  poniamo

$$\int_M \omega = \int_U \omega^\sharp.$$

Se  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  è una  $k$ -superficie orientata tale che  $M = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\bar{U})$  con  $i \neq j \implies \varphi_i(U) \cap \varphi_j(U) = \emptyset$  e  $[\{d\varphi_i(e_1), \dots, d\varphi_i(e_k)\}]$  è l'orientazione di  $M$  per ogni  $i$  e per ogni  $x \in U$  (ben definita per orientabilità di  $M$  vista sulle  $\varphi_i$ ) allora poniamo

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\varphi_i(U)} \omega = \sum_{i=1}^N \int_U \omega_i^\sharp, \quad \text{dove } \omega_i^\sharp \text{ è il pullback di } \omega \text{ tramite } \varphi_i.$$

*Osservazione 5.167.*

Se  $M^+$  e  $M^-$  sono le due orientazioni di  $M$  allora

$$\int_{M^+} \omega = - \int_{M^-} \omega.$$

**Proposizione 5.168** (Proprietà dell'integrale).

L'integrale definito gode delle seguenti proprietà:

- $\int_M \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = \alpha \int_M \omega_1 + \beta \int_M \omega_2$
- $\int_{M_1 \cup M_2} \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega$  se  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

**Teorema 5.169** (Stokes).

Sia  $M$  una  $k$ -superficie di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^n$  orientata e sia  $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  una forma differenziale di classe  $C^1$ , allora

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO

□

## Capitolo 6

# Equazioni Differenziali ordinarie

### 6.1 Esistenza e unicità e Soluzioni Massimali

**Definizione 6.1** (Equazione differenziale).

Un'equazione differenziale (**ordinaria**) di **ordine**  $k$  è un'equazione della forma

$$F(x, y(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0,$$

dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $F : I \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$  è continua. La funzione  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta **funzione incognita**.

Se è possibile scrivere l'equazione nella forma

$$y^{(k)} = \tilde{F}(x, y, \dots, y^{(k-1)}(x))$$

chiamiamo questa **forma esplicita**.

*Osservazione 6.2* (Ricondurre un'equazione al primo ordine).

Tramite un cambio di variabili  $Y(x) = (y(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \in \mathbb{R}^{nk}$  possiamo scrivere un'equazione differenziale di ordine  $k$  nella forma

$$Y' = f(x, Y)$$

per un'opportuna  $f$  continua.

**Definizione 6.3** (Problema di Cauchy).

Data un'equazione differenziale  $y' = f(x, y)$  dove  $f : I \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, un sistema del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con  $(x_0, y_0) \in I \times A$  è detto **problema di Cauchy**. Il valore  $y_0$  è detto **dato iniziale**.

*Osservazione 6.4* (Formulazione integrale del problema di Cauchy).

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$y(x)$  ne è soluzione se e solo se risolve

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

in particolare le soluzioni di un problema di Cauchy sono di classe  $C^1$  (la loro derivata è  $f(x, y(x))$  che è continua).

**Notazione 6.5.**

Per il resto della sezione supporremo che l'equazione differenziale in esame abbia la forma

$$y' = f(x, y)$$

e che i problemi di Cauchy abbiano la forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Supponiamo inoltre  $A = B_r(y_0)$  e come notazione poniamo

$$I_a = (x_0 - a, x_0 + a).$$

**Definizione 6.6** (Uniformemente Lipschitz).

Una funzione  $f(x, y) : I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  è detta **uniformemente  $L$ -Lipschitziana** nelle  $y$  se esiste  $L \geq 0$  tale che per ogni  $(x, y_1), (x, y_2) \in I_a \times B_r(y_0)$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

**Teorema 6.7** (Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz).

Supponiamo che  $f : I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia continua, limitata e uniformemente  $L$ -lipschitziana nelle  $y$ . Allora esiste  $\delta \in (0, a]$  ed esiste un'unica  $y \in C^1(I_\delta, \mathbb{R}^n)$  soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $(x_0, y_0)$ .

*Dimostrazione.*

Per la formulazione del problema di Cauchy in forma integrale (6.4) si ha che le soluzioni saranno necessariamente  $C^1$ . Dato  $\delta > 0$  poniamo  $X = (C(I_\delta, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  con  $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  e definiamo

$$X_{\delta,r} = \{y \in C(I_\delta, \mathbb{R}^n) \mid y(x) \in \overline{B_r(y_0)} \forall x \in I_\delta\},$$

il quale è un sottospazio chiuso di  $C(I_\delta, \mathbb{R}^n)$ , in particolare  $X_{\delta,r}$  è uno spazio metrico completo. Per mostrare esistenza e unicità proviamo a costruire una contrazione su  $X_{\delta,r}$  per un opportuno  $\delta$  che abbia come punto fisso una soluzione del problema di Cauchy. Se riuscissimo potremmo applicare il **Teorema delle contrazioni / Banach Caccioppoli** e avremmo mostrato che esiste un unico punto fisso e quindi un'unica soluzione del problema di Cauchy.

La forma integrale del problema di Cauchy (6.4) ci suggerisce una candidata contrazione:

$$F : \begin{array}{ll} X_{\delta,r} & \longrightarrow X \\ y & \longmapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \end{array} ,$$

infatti se  $y = F(y)$  allora  $y$  è evidentemente una soluzione del problema di Cauchy.

Cerchiamo delle condizioni sufficienti affinché  $F$  sia una contrazione su  $X_{\delta,r}$ :

$F(X_{\delta,r}) \subseteq X_{\delta,r}$ ) Poniamo  $M = \|f\|_\infty$ . Vogliamo capire quando per ogni  $x \in I_\delta$  si ha  $|F(y)(x) - y_0| \leq r$ :

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq M\delta \leq r,$$

dove l'ultima disuguaglianza vale se  $\delta \leq \frac{r}{M}$ .

$C$ -Lipschitz con  $C \in (0, 1)$ ) Vogliamo capire quando per ogni  $y_1, y_2 \in X_{\delta,r}$  si ha

$$\|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty \leq C \|y_1 - y_2\|_\infty .$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}
 |F(y_1)(x) - F(y_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \leq \\
 &\leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \leq \\
 &\leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq \\
 &\leq L\delta \|y_1 - y_2\|_\infty < \|y_1 - y_2\|_\infty
 \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza vale se  $\delta < \frac{1}{L}$ .

Se scegliamo  $\delta < \min(a, \frac{1}{M}, \frac{1}{L})$  allora entrambe le condizioni sono rispettate e  $F$  è una contrazione. Per quanto detto questo conclude.  $\square$

*Osservazione 6.8* (Caso per  $f$  non limitata).

Il teorema vale anche per  $f$  non limitata. Restringendo il dominio di  $f$  ad un compatto che contiene un intorno di  $(x_0, y_0)$  troviamo un intorno del punto dove  $f$  è limitata. Restringendo ulteriormente troviamo una restrizione del dominio dove  $f$  rispetta le ipotesi del teorema<sup>1</sup>. Sia dunque  $y : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  la soluzione garantita applicando il teorema considerando  $f$  ristretta. È evidente che  $y$  rispetta la tesi anche per  $f$  senza restrizione.

*Osservazione 6.9* (Baffi di Peano).

Se  $f$  non è uniformemente lipschitziana allora non abbiamo unicità. Questo fenomeno è detto **baffo di Peano**. Possiamo però mantenere l'esistenza, che si formalizza nel **Teorema di Peano**.

**Esempio 6.10** (Un classico baffo di Peano).

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

abbiamo le seguenti soluzioni

$$y(x) = 0, \quad y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{(x-x_0)^2}{4} & x \geq x_0 \end{cases},$$

in particolare non abbiamo soluzione unica.

### 6.1.1 Soluzioni Massimali

*Osservazione 6.11* (Estensione di soluzioni).

Sia  $y : I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$  una soluzione del problema di Cauchy. Osserviamo che  $y$  è  $M$ -Lipschitziana per  $M = \|f\|_\infty$ :

$$|y'(x)| = |f(x, y(x))| \leq \|f\|_\infty = M,$$

dunque esistono i limiti (1.43)<sup>2</sup>

$$\lim_{x \rightarrow x_0 \pm \delta} y(x) = y^\pm.$$

Se  $y^+ \in B_r(y_0)$ , cioè  $|y^+ - y_0| < r$  allora posso riapplicare il **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz** ed estendere la soluzione a  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta + \delta')$  con  $\delta' > 0$ . Analogamente per  $y^- \in B_r(y_0)$ .

<sup>1</sup>segue dal fatto che  $I_b$  e  $B_{r'}(y_0)$  al variare di  $b$  e  $r'$  sono sistemi fondamentali di intorni per  $x_0 \in I_a$  e  $y_0 \in B_r(y_0)$  e che il prodotto di aperti è aperto

<sup>2</sup>Stiamo sfruttando il fatto che funzioni uniformemente continue definite su un aperto ammettono estensione continua unica sul bordo.

**Definizione 6.12** (Soluzione massimale).  
Dato un problema di Cauchy. Una soluzione

$$y : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow B_r(y_0)$$

è **massimale** se

- $\delta_2 < a \implies \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} y(x) \in \partial B_r(y_0)$
- $\delta_1 < a \implies \lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} y(x) \in \partial B_r(y_0)$

*Osservazione 6.13* (Teorema degli asintoti / Fuga dai Compatti).

Se  $a = r = +\infty$  e  $y$  è una soluzione massimale del problema di Cauchy definita su  $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$  allora  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  implica che se  $\delta_1$  è finito allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} |y(x)| = +\infty.$$

Similmente abbiamo un asintoto anche per  $\delta_2$  finito.

*Osservazione 6.14.*

Consideriamo l'equazione differenziale data da  $f : I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $f$  sia  $L$ -lipschitziana nelle  $y$  e poniamo  $M = \|f\|_\infty$ . Sia  $y$  una soluzione massimale, la quale è  $M$ -Lipschitz e sia  $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \subseteq I_a$  il suo dominio. Allora

$$r = |y(x_0 + \delta_2) - y_0| = |y(x_0 + \delta_2) - y(x_0)| \stackrel{M\text{-Lipschitz}}{\leq} M\delta_2,$$

cioè  $a \geq \delta_2 \geq \frac{r}{M}$ . Similmente  $a \geq \delta_1 \geq \frac{r}{M}$ . Dunque l'intervallo di esistenza della soluzione massimale dipende da  $a$ ,  $r$  e  $M$  ma NON da  $L$ .

**Definizione 6.15** (Inf-Convolution).

Sia  $X$  uno spazio normato e siano  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . La loro **inf-convoluzione** è data da

$$x \mapsto \inf_{y \in X} \{f(x - y) + g(y)\}.$$

**Teorema 6.16** (Teorema di Peano).

Supponiamo che  $f : I_a \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia continua e poniamo  $M = \|f\|_\infty$ . Allora esistono  $\delta \geq \min(a, \frac{r}{M})$  e  $y : I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$  soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $(x_0, y_0)$ .

*Dimostrazione.*

Per ogni  $K \in \mathbb{N}$  approssimo  $f$  con  $f_K$  che sia  $K$ -Lipschitz. Consideriamo l'inf-convoluzione di  $f(x, \cdot)$  e  $x \mapsto K|x|$ <sup>3</sup>

$$f_K(x, y) = \inf_{z \in B_r(y_0)} \{f(x, z) + K|z - y|\}.$$

Dato che  $(x, y) \mapsto f(x, z) + K|z - y|$  è  $K$ -Lipschitz in  $y$  per ogni  $x$ , si ha che anche  $f_K$  è  $K$ -Lipschitz (1.46).

Osserviamo che  $f_K \leq f_{K+1} \leq f$ , dunque

$$\lim_K f_K(x, y) = \sup_K f_K(x, y) = f.$$

Infine osserviamo che  $f_K \rightarrow f$  uniformemente, cioè  $\|f - f_K\|_\infty \rightarrow 0$ .

Applico il teorema di **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz** al sistema

$$\begin{cases} y'_K = f_K(x, y_K) \\ y_K(x_0) = y_0 \end{cases}$$

<sup>3</sup>La inf-convoluzione corrisponde ad approssimare  $f$  considerando l'involuppo inferiore di coni di pendenza  $K$  posti in ogni punto di  $f$ . In un qualche modo "tagliamo da sotto i pezzi troppo ripidi".

e trovo una soluzione  $y_K : I_\delta \rightarrow B_r(y_0)$ , che estendo fino ad essere massimale. Dato che il domino non dipende da  $K$  (osservazione precedente) abbiamo che tutte queste soluzioni massimali hanno lo stesso dominio.

Osserviamo che  $y_K$  è  $M$ -Lipschitz dato che  $\|f_K\|_\infty \leq \|f\|_\infty = M$ , quindi le  $y_K$  sono equilimitate ( $\|f_K\|_\infty \leq M$ ) ed equicontinue (addirittura sono equilipschitziane). Per il **Teorema di Ascoli-Arzelà** esiste una sottosuccessione  $K_n$  tale che

$$y_{K_n} \rightarrow y \in C(I_\delta, \overline{B_r(y_0)})$$

uniformemente. Si ha dunque che

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_n y_{K_n}(x) = \lim_n y_0 + \int_{x_0}^x f_{K_n}(t, y_{K_n}(t)) dt \stackrel{\text{Conv. Unif.}}{=} \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_n f_{K_n}(t, y_{K_n}(t)) dt = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \end{aligned}$$

cioè  $y$  è una soluzione del problema di Cauchy. □

**Proposizione 6.17** (Equazione lineare al primo ordine).

Date  $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, il sistema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione, ovvero

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt,$$

dove  $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ .

*Dimostrazione.*

Riscriviamo l'equazione come

$$y'(x) - a(x)y(x) = b(x)$$

e moltiplichiamo entrambi i membri per  $e^{-A(x)}$

$$e^{-A(x)} b(x) = e^{-A(x)} (y'(x) - a(x)y(x)) = \left( e^{-A(x)} y(x) \right)'$$

Integrando in  $x$  abbiamo

$$e^{-A(x)} y(x) - \underbrace{e^{-A(x_0)} y(x_0)}_{=1} = \int_{x_0}^x e^{-A(t)} b(t) dt,$$

da cui

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt.$$

Osserviamo che questa soluzione rispetta le condizioni del **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz**, dunque è unica sul suo intervallo di definizione. □

*Osservazione 6.18.*

Poiché  $a$  e  $b$  sono definite globalmente, anche la soluzione  $y$  definita sopra è definita globalmente.

**Teorema 6.19** (Teorema di Esistenza Globale).

Sia  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua con  $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$  con  $a, b \in C(\mathbb{R})$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ . Allora ogni soluzione massimale del problema di Cauchy è globale.

*Dimostrazione.*

Sia  $y : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$  una soluzione massimale e supponiamo per assurdo  $\delta_2 \neq +\infty$  (il caso  $\delta_1 \neq +\infty$  è analogo). Per il **Teorema degli asintoti / Fuga dai Compatti**

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} |y| = +\infty.$$

Sia  $z(x) = |y(x)|$  e supponiamo  $z > 0$  (tanto lo è vicino a  $x_0 + \delta_2$ ):

$$z'(x) = y'(x) \frac{y(x)}{|y(x)|} \leq |f(x, y(x))| \leq a(x)z(x) + b(x),$$

dunque  $z(x) \leq \tilde{z}(x)$ <sup>4</sup>, dove  $\tilde{z}$  risolve il sistema

$$\begin{cases} \tilde{z}' = a\tilde{z} + b \\ \tilde{z}(x_0) = z(x_0) = |y_0|. \end{cases}$$

In quanto soluzione di un'equazione differenziale lineare (6.17),  $\tilde{z}$  è definita globalmente, ma questo è assurdo perché  $y$  ha un asintoto in  $x_0 + \delta_2$  e quindi  $z$  tende a  $+\infty$  in  $x_0 + \delta_2$ .  $\square$

## 6.1.2 Dipendenza continua dal dato iniziale

In questa sezione consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

**Teorema 6.20** (Dipendenza continua dalle condizioni iniziali).

Sia  $f$  continua e  $L$ -lipschitziana in  $y$ . Se

$$y(x) = \Phi(x_0, y_0)(x)$$

è la soluzione del problema di Cauchy allora  $\Phi$  è lipschitziana in  $y_0$  e si ha

$$|\Phi(x_0, y_0)(x) - \Phi(x_0, y_1)(x)| \leq |y_0 - y_1| e^{L|x-x_0|}$$

*Dimostrazione.*

Accorciamo la notazione ponendo

$$y_0(x) = \Phi(x_0, y_0)(x), \quad y_1(x) = \Phi(x_0, y_1)(x).$$

Definiamo

$$w(x) = |y_0(x) - y_1(x)|,$$

la quale è lipschitziana in  $x$ :

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{y_0'(x) - y_1'(x)}{|y_0(x) - y_1(x)|} (y_0'(x) - y_1'(x)) \leq |y_0'(x) - y_1'(x)| = \\ &= |f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))| \leq \\ &\leq L |y_0(x) - y_1(x)| = Lw(x). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Moralmente, a parità del punto di partenza, una soluzione resta sotto un'altra che ha derivata maggiore al crescere di  $x$ .

Osserviamo dunque che se  $z$  è la soluzione di

$$\begin{cases} z' = Lz \\ z(x_0) = w(x_0) \end{cases}$$

allora  $z \geq w$  per  $x \geq x_0$ , cioè

$$w(x) \leq z(x) = |y_0(x) - y_1(x)|e^{L(x-x_0)}.$$

La stima per  $x < x_0$  si trova scambiando  $x$  con  $-x$ . □

## 6.2 Sistemi Lineari

**Definizione 6.21** (Equazione differenziale lineare).

Per  $x \in I \subseteq \mathbb{R}$  e  $A : I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$  e  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, un'equazione differenziale della forma

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$$

è detta **lineare**. Si parla anche di **sistema lineare**.

Se  $A(x) = A$  costante allora il sistema è detto a **coefficienti costanti**.

Se  $b(x) = 0$  il sistema è detto **omogeneo**.

*Osservazione 6.22* (Esistenza e unicità globale delle soluzioni per sistemi lineari).

Le soluzioni esistono globalmente (per ogni  $x \in I$ ) e sono uniche per (6.7) e (6.19).

**Proposizione 6.23** (Le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio affine).

Le soluzioni di un sistema lineare formano uno spazio affine di dimensione  $n$ . In particolare le soluzioni del sistema omogeneo  $y' = A(x)y$  sono uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  e una soluzione di  $y' = A(x)y + b(x)$  si scrive nella forma

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x),$$

dove  $y_0(x)$  è una soluzione di  $y' = A(x)y$  e  $y_p(x)$  è una soluzione fissata del sistema.

*Dimostrazione.*

Consideriamo il sistema omogeneo

$$\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e sia  $\Phi(x_0, y_0)(x)$  la sua soluzione (6.22). Osserviamo che

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ y_0 & \longmapsto & \Phi(x_0, y_0)(x) \end{array}$$

è lineare e bigettiva: è lineare per linearità della derivata, surgettiva perché ogni soluzione ha un valore in  $x_0$  e iniettiva per il **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz**.

Si ha dunque che lo spazio delle soluzioni ha dimensione  $\dim \phi(\mathbb{R}^n) = \dim \mathbb{R}^n = n$ .

Siano ora  $y_1$  e  $y_2$  soluzioni di  $y' = A(x)y + b(x)$ . Posta  $w(x) = y_1 - y_2$  si ha che questa è una soluzione del sistema omogeneo per linearità. □

*Osservazione 6.24.*

Se  $y_1, \dots, y_n$  sono una base dello spazio delle soluzioni di  $y' = A(x)y$  e  $y_p$  è una soluzione di  $y' = A(x)y + b(x)$  allora la soluzione generale di  $y' = A(x)y + b(x)$  si scrive nella forma

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

*Osservazione 6.25* (Ricondurre equazioni di ordine alto a sistema del primo ordine).  
Le equazioni lineari di ordine  $k$

$$y^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y^{(i)}(x) + b$$

si possono scrivere come sistema del primo ordine ponendo

$$Y(x) = (y(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

e risolvendo il sistema

$$Y' = AY + B,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ e } B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

### 6.2.1 Caso lineare a coefficienti costanti

#### Caso omogeneo

Consideriamo dapprima il caso del sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti:  
Fissiamo  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e consideriamo il sistema

$$y' = Ay$$

cercando le soluzioni  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definizione 6.26** (Esponenziale di matrice).

Data  $A \in M(n, \mathbb{R})$  definiamo l'**esponenziale** di  $A$  come

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in M(n, \mathbb{R}).$$

*Osservazione 6.27* (Assoluta convergenza dell'esponenziale di matrice).  
Se sulle matrici consideriamo la norma indotta

$$\|A\| = \max_{|x| \leq 1} |Ax|,$$

la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

è assolutamente convergente.

*Dimostrazione.*

Abbiamo assoluta convergenza se converge la serie dei moduli:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} \in \mathbb{R}.$$

□

*Osservazione 6.28* (Convergenza uniforme all'esponenziale di matrice).  
Se consideriamo le funzioni

$$f_N : \begin{array}{ccc} M(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & M(n, \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & \sum_{n=0}^N \frac{A^n}{n!}, \end{array}$$

queste sono *uniformemente convergenti* a  $e^A$  per  $N \rightarrow +\infty$  sui compatti di  $M(n, \mathbb{R})$  per il **Teorema di Ascoli-Arzelà**.

**Proposizione 6.29** (Proprietà dell'esponenziale di matrice).

Valgono le seguenti proprietà

1. Se  $AB = BA$  allora  $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

2.  $e^A = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( I_n + \frac{A}{k} \right)^k$

3.  $\det(e^A) = e^{\text{tr} A} > 0$ , in particolare  $e^A$  è sempre invertibile e  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

4. Se  $M$  è invertibile allora

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M.$$

*Dimostrazione.*

1) Segue computazionalmente:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \frac{A^h B^{k-h}}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k \frac{A^h B^{k-h}}{h!(k-h)!} = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = \\ &= e^A e^B, \end{aligned}$$

dove per la penultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che il raggio di convergenza dell'esponenziale è infinito e la formula del prodotto di Cauchy per le serie assolutamente convergenti.

2) Sviluppiamo il termine del limite

$$\left( I_n + \frac{A}{k} \right)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{A^i}{k^i} = \sum_{i=0}^k \underbrace{\left( \frac{k!}{k^i (k-i)!} \right)}_{\doteq c_{k,i}} \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i} \frac{A^i}{i!},$$

dove abbiamo posto  $c_{k,i} = 0$  per  $i > k$ .

Mostriamo che questa successione tende a  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \left( I_n + \frac{A}{k} \right)^k - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{\infty} (c_{k,i} - 1) \frac{A^i}{i!} \right\| \leq \\ &\leq \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} |c_{k,i} - 1| \frac{\|A\|^i}{i!}}_{\doteq R(k)} \stackrel{c_{k,i} \in [0,1]}{\leq} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} = e^{\|A\|}. \end{aligned}$$

Segue che la serie  $R(k)$  converge assolutamente per ogni  $k$ , dunque è lecito calcolare  $\lim_k R(k)$  considerando la serie dei limiti, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} |c_{k,i} - 1| \frac{\|A\|^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \lim_k c_{k,i} - 1 \right| \frac{\|A\|^i}{i!}.$$

Per concludere basta dunque mostrare che  $c_{k,i} \rightarrow_k 1$  per ogni  $i$ , che segue dal seguente conto:

$$\lim_k \frac{k!}{k^i (k-i)!} = \lim_k \prod_{j=0}^{i-1} \left(1 - \frac{j}{k}\right) = \prod_{j=0}^{i-1} (1-0) = 1.$$

3) Usando il punto precedente,

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \lim_N \det \left( I_n + \frac{A}{N} \right)^N \text{ Forma di Jordan} \\ &= \lim_N \left( \det \left( I_n + \frac{J}{N} \right) \right)^N = \\ &= \lim_N \left( \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{\lambda_i}{N} \right) \right)^N = \\ &= \lim_N \left( 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \lambda_i + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \right)^N = \\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\text{tr } A}, \end{aligned}$$

dove  $\lambda_i$  sono gli autovalori di  $A$  come matrice a coefficienti complessi.

4) Segue computazionalmente:

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M^{-1}AM)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{-1}A^kM}{k!} = M^{-1}e^AM.$$

□

**Proposizione 6.30** (Calcolo dell'esponenziale).

Per calcolare l'esponenziale di matrice è utile studiare i seguenti casi particolari:

1. *A diagonale*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. *A blocco di Jordan*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

*Dimostrazione.*

1) Osserviamo che

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \implies e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

2) Sia  $C = A - \lambda I$  e osserviamo che è nilpotente (ad ogni passo si alza la diagonale fino a scomparire dopo  $n - 1$  moltiplicazioni):

$$e^A = e^{C+\lambda I} = e^\lambda e^C.$$

Ci basta calcolare l'esponenziale per le nilpotenti:

$$e^C = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3! & \cdots & 1/(n-1)! \\ & 1 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1/3! \\ & & & 1 & 1/2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

**Teorema 6.31** (Derivata dell'esponenziale di matrice).

La funzione  $x \mapsto e^{xA}$  è differenziabile per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e si ha che

$$\frac{de^{xA}}{dx} = Ae^{xA}$$

*Dimostrazione.*

Calcoliamo la derivata in questione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{xA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)A} - e^{xA}}{h} = e^{xA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I_n}{h} = \\ &= e^{xA} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} h^k A^k - I_n \right) = \\ &= e^{xA} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k h^{k-1} = \\ &= e^{xA} \lim_{h \rightarrow 0} \left( A + h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+2} h^j}{(j+2)!} \right) = \\ &= e^{xA} A \left( I_n + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^{j+1} h^j}{(j+2)!}}_{\text{abs. conv.}} \right) = e^{xA} A = Ae^{xA}, \end{aligned}$$

dove l'assoluta convergenza segue dal fatto che in modulo possiamo maggiorare la serie con una geometrica. □

**Corollario 6.32.**

$y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0$  è l'unica soluzione di  $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ .

**Caso non omogeneo**

Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua.

**Proposizione 6.33** (Sistema lineare a coefficienti costanti).  
 In analogia alle equazioni lineari del primo ordine (6.17)

$$y(x) = e^{(x-x_0)A}y_0 + \underbrace{e^{xA} \int_{x_0}^x e^{-sA}b(s)ds}_{y_p}$$

*Dimostrazione.*

La tesi segue se  $y_p$  è una soluzione del problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$  :

$$y'_p = Ae^{xA} \int_{x_0}^x e^{-sA}b(s)ds + \underbrace{e^{xA}e^{-xA}}_{=I_n}b(x) = Ay_p + b(x).$$

L'altra verifica è evidente perché gli estremi di integrazione coincidono e quindi in ogni entrata troviamo 0, dunque abbiamo  $e^{xA}\underline{0} = \underline{0}$ .  $\square$

### Caso bidimensionale omogeneo

Consideriamo il sistema

$$y' = Ay$$

per  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Siano  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  gli autovalori di  $A$ . Si presentano i seguenti casi:

Diagonalizzabile reale) Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  e

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

allora  $e^A = Me^{M^{-1}AM}M^{-1}$ . Osserviamo che

$$e^{M^{-1}AM} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \\ & e^{\lambda_2} \end{pmatrix},$$

dunque le soluzioni di  $y' = (M^{-1}AM)y$  sono quelle della forma

$$y(x) = (c_1e^{\lambda_1x}, c_2e^{\lambda_2x})$$

per  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Per  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  diciamo che  $(0, 0)$  è un **nodo stabile**, per  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  abbiamo che  $(0, 0)$  è un **nodo instabile**, altrimenti abbiamo una **sella**.

Blocco di Jordan reale) Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$  e

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

allora le soluzioni del sistema  $y' = (M^{-1}AM)y$  risolvono

$$\begin{cases} y'_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ y'_2 = \lambda y_2 \end{cases} \implies \begin{cases} y'_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2 = c_2e^{\lambda x} \end{cases} \implies \begin{cases} y_1 = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x} \\ y_2 = c_2e^{\lambda x} \end{cases},$$

cioè

$$y(x) = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x, c_2).$$

Se  $\lambda < 0$  parliamo di **nodo improprio stabile** e se  $\lambda > 0$  abbiamo un **nodo improprio instabile**.

Blocco di Jordan complesso) Se  $\lambda = \alpha + i\beta$  allora

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che

$$e^{M^{-1}AM} = e^\alpha e^{\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}} = e^\alpha \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

cioè  $e^{M^{-1}AM}$  è una rotazione di angolo  $\beta$  seguita da un riscaldamento di fattore  $e^\alpha$ . Le soluzioni del sistema  $y' = (M^{-1}AM)y$  sono della forma

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) - c_2 \sin(\beta x), c_1 \sin(\beta x) + c_2 \cos(\beta x)).$$

Se  $\alpha < 0$  abbiamo un **fuoco stabile**, se  $\alpha > 0$  abbiamo un **fuoco instabile**, se  $\alpha = 0$  allora abbiamo un **centro**. Se  $\beta > 0$  abbiamo una rotazione in senso antiorario. Se  $\beta < 0$  allora abbiamo rotazione in senso orario.

## 6.2.2 Sistemi lineari (non a coefficienti costanti)

In questa sezione consideriamo  $A, b$  continue su  $I \subseteq \mathbb{R}$  e il sistema sarà

$$y' = A(x)y + b(x).$$

### Caso omogeneo

Il caso omogeneo corrisponde al sistema  $y' = A(x)y$ .

**Definizione 6.34** (Matrice Wronskiana).

Date  $n$  soluzioni  $y_1, \dots, y_n$ , la matrice

$$W(x) = (y_1 \mid \dots \mid y_n)$$

è detta **matrice wronskiana** e  $w(x) = \det W(x)$  è detto **determinante wronskiano**.

*Osservazione 6.35* (Wronskiana nel caso di coefficienti costanti).

Se  $A$  è costante allora le soluzioni sono della forma  $y = e^{xA}y_0$ . In particolare scegliendo  $y_i = e_i$  si ha che  $e^{xA}e_i$  sono soluzioni del sistema, dunque  $e^{xA}$  è una matrice Wronskiana.

**Proposizione 6.36.**

Se  $W$  è una matrice Wronskiana e  $w = \det W$  allora

- $W'(x) = A(x)W(x)$
- $w'(x) = (\operatorname{tr} A)w(x)$ .

*Dimostrazione.*

\*) Segue da  $y'_k = A(x)y_k$ .

\*) Verifichiamo la seguente identità:

$$\begin{aligned} \det(W(x+h)) &= \det(\underbrace{W(x) + hW'(x) + o(h)}_{=(I+hA)W}) = \\ &= \det(I+hA)w(x) + o(h) = \\ &= \prod_{i=1}^n (1+h\lambda_i)w(x) + o(h) = \\ &= (1+\operatorname{tr}(A)h + o(h))w(x) + o(h). \end{aligned}$$

Per concludere calcoliamo  $w'$ :

$$\begin{aligned} w'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x+h) - w(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\det(W(x+h)) - w(x)) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} ((1+\operatorname{tr}(A)h + o(h))w(x) + o(h) - w(x)) = \\ &= \operatorname{tr}(A)w(x). \end{aligned}$$

□

*Osservazione 6.37* (Determinante Wronskiano nullo se e solo se le soluzioni sono dipendenti).

Sia  $W$  la matrice Wronskiana data dalle soluzioni  $y_1, \dots, y_n$  e sia  $w$  il relativo determinante Wronskiano. Allora  $w(x_0) = 0$  se e solo se  $y_1, \dots, y_n$  sono linearmente dipendenti.

*Dimostrazione.*

L'equazione

$$w'(x) = (\operatorname{tr} A)w(x)$$

è un'equazione del primo ordine scalare, dunque (6.17)

$$w(x) = w(x_0)e^{F(x)}, \quad \text{dove } F(x) = \int_{x_0}^x \operatorname{tr}(A(s))ds,$$

in particolare se  $w(x_0) = 0$  per qualche  $x_0 \in I$  allora  $w(x) = 0$  per ogni  $x$ . Per definizione di determinante wronskiano abbiamo la tesi.  $\square$

### Caso non omogeneo

Se  $y_1, \dots, y_n$  sono soluzioni di  $y' = A(x)y$  e  $y_p' = A(x)y_p + b(x)$  allora

$$y' = A(x)y + b(x) \implies y = y_p + \sum_{i=1}^n c_i y_i \text{ con } c_i \in \mathbb{R}.$$

**Proposizione 6.38** (Soluzione particolare di un sistema lineare).

Data una matrice wronskiana  $W$  con  $\det W \neq 0$ <sup>5</sup>, si ha che

$$y_p(x) = W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds$$

è la soluzione particolare che verifica  $y_p(x_0) = 0$ .

*Dimostrazione.*

Poniamo  $y_p(x) = W(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds$ .

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= W'(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + b(x) = \\ &= AW(x) \int_{x_0}^x W(s)^{-1} b(s) ds + b(x) = \\ &= Ay_p(x) + b(x), \end{aligned}$$

cioè  $y_p$  è una soluzione particolare. Sostituendo  $x = x_0$  è chiaro che  $y_p(x_0) = 0$ .  $\square$

## 6.3 Sistemi autonomi

**Definizione 6.39** (Sistema autonomo).

Sia  $y' = f(y)$  per  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $A$  aperto e  $f \in C^1(A)$ . Il sistema si dice **autonomo** se  $f$  dipende solo da  $y$ .

### 6.3.1 Traiettorie

**Definizione 6.40** (Traiettorie).

Sia  $u : (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$  una soluzione massimale di  $u' = F(u)$ . L'insieme

$$\{u(t) \mid t \in (\alpha, \beta)\}$$

si dice **traiettorie** o **orbita** di  $u$ .

<sup>5</sup>leggasi "date  $n$  soluzioni indipendenti"

*Osservazione 6.41.*

Una traiettoria ha una orientazione in maniera naturale.

**Lemma 6.42** (Gruppi additivi densi in 0).

Se  $G \subseteq \mathbb{R}$  è un gruppo additivo con l'operazione indotta dalla somma in  $\mathbb{R}$  tale che 0 è un punto di accumulazione allora  $G$  è denso in  $\mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.*

Fissati  $P \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon > 0$  si ha che per ipotesi esiste  $r \in G$  tale che  $0 < |r| < \varepsilon$ . Dato che  $G$  è un gruppo (chiuso per inverso additivo) supponiamo  $r > 0$ . Allora per un opportuno  $k \in \mathbb{N}$  si ha che  $kr \in B_\varepsilon(P)$  per la proprietà archimedeica di  $\mathbb{R}$ .  $\square$

*Osservazione 6.43* (Proprietà delle traiettorie).

Valgono le seguenti affermazioni

1. Se  $u$  è soluzione di  $u' = F(u)$  e  $c \in \mathbb{R}$  allora anche  $v(t) = u(t - c)$  è soluzione di  $v' = F(v)$ .
2. Se  $u$  e  $\tilde{u}$  sono soluzioni di  $u' = F(u)$  e  $u(t_0) = \tilde{u}(t_1)$  allora hanno la stessa traiettoria. Più precisamente  $\tilde{u}(t) = u(t + t_0 - t_1)$ .
3. Se  $u$  è una soluzione non costante di  $u' = F(u)$  tale che  $u(t_0) = u(t_1)$  allora  $u$  è periodica con periodo  $T \neq 0$ .

*Dimostrazione.*

1) Deriviamo

$$v'(t) = u'(t - c) = F(u(t - c)) = F(v(t)).$$

2) Basta mostrare che  $\tilde{u}$  e  $v(t) = u(t + t_0 - t_1)$  sono due soluzioni dello stesso problema di Cauchy. Per il punto precedente entrambe risolvono  $u' = F(u)$  e coincidono per  $t = t_1$  per costruzione.

3) Per il punto precedente si ha che  $u(t) = u(t + t_0 - t_1)$  per ogni  $t$ . Osserviamo che  $u$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$  per la proprietà archimedeica di  $\mathbb{R}$ . Sia

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R} \mid u(t) = u(t + p)\}.$$

Osserviamo che  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  in quanto  $t_0 - t_1 \in \mathcal{P}$ . Osserviamo che  $\mathcal{P}$  è chiuso come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  ed è un gruppo additivo:

Chiuso) Dato che  $x \mapsto x + t$  e  $u(x)$  sono continue si ha che  $x \mapsto u(t + x)$  è continua. Se  $x_i$  è una successione a valori in  $\mathcal{P}$  convergente a  $\bar{x}$  si ha che

$$u(t + \bar{x}) \stackrel{\text{continua}}{=} \lim_i u(t + x_i) \stackrel{x_i \in \mathcal{P}}{=} \lim_i u(t) = u(t),$$

cioè  $\bar{x} \in \mathcal{P}$ .

Gruppo additivo) Verifichiamo che è un sottogruppo di  $(\mathbb{R}, +)$ :

- $0 \in \mathcal{P}$  evidentemente
- se  $p \in \mathcal{P}$  allora  $u(t) = u((t - p) + p) = u(t - p)$ , cioè  $-p \in \mathcal{P}$
- se  $a, b \in \mathcal{P}$  allora  $u(t) = u(t + a) = u((t + a) + b) = u(t + (a + b))$ , cioè  $a + b \in \mathcal{P}$ .

Sia  $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cap (0, +\infty)$  e consideriamo il suo estremo inferiore.

\*) Se  $\inf \mathcal{P}^+ = 0$  allora per il lemma (6.42)  $\mathcal{P}$  è denso in  $\mathbb{R}$ , ma dato che è chiuso si ha  $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ . Ma questo non può succedere perché  $u$  non è costante per ipotesi.

\*) Se  $\inf \mathcal{P}^+ \stackrel{\text{Chiuso}}{=} \min \mathcal{P}^+ = p_0 > 0$  si ha che  $p_0$  è il periodo di  $u$ , infatti se esistesse  $T \neq 0$  tale che  $T \neq kp_0$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  allora per un opportuno  $k$  si ha che  $0 < T + kp_0 < p_0$ , che è assurdo per definizione di  $p_0$ .  $\square$

**Corollario 6.44** (Interazione tra traiettorie).

Valgono le seguenti proposizioni:

1. Ad ogni traiettoria corrisponde una famiglia di traslate della stessa soluzione dell'equazione
2. Due traiettorie si intersecano se e solo se coincidono
3.  $\Omega$  è foliato dalle traiettorie, cioè è unione disgiunta di traiettorie.

*Dimostrazione.*

1) Se  $T$  è la traiettoria di  $u$  allora per la proposizione si ha che se  $\tilde{u}$  ha come traiettoria  $T$  allora  $\tilde{u}$  è un traslato temporale di  $u$ . Viceversa tutti i traslati temporali di  $u$  hanno la stessa traiettoria sempre per la proposizione.

2) Questa è un immediata conseguenza del **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz**.

3) Per ogni punto una traiettoria che passa per quel punto è data dalla soluzione al problema di Cauchy che ha quel punto come condizione iniziale. La disgiunzione delle traiettorie è il punto precedente.  $\square$

**Proposizione 6.45** (Le traiettorie dipendono solo da direzione e verso del campo).

Siano  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  e  $\lambda(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  con  $\lambda(x) > 0$ . Se

$$G(x) = \lambda(x)F(x)$$

allora i sistemi  $u' = F(u)$  e  $v' = G(v)$  hanno le stesse traiettorie.

*Dimostrazione.*

Sia  $v$  una soluzione di  $v' = G(v)$ . Siano

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \lambda(v(s)) ds, \quad \psi(t) = \varphi^{-1}(t).$$

Mostriamo che  $u(t) = v(\psi(t))$  è soluzione di  $u' = F(u)$  e soddisfa  $u(0) = v(t_0)$ :

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{d}{dt} (v(\psi(t))) = v'(\psi(t))\psi'(t) = G(v(\psi(t))) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \\ &= \lambda(v(\psi(t)))F(v(\psi(t))) \frac{1}{\varphi'(\psi(t))} = \\ &= \frac{\lambda(v(\psi(t)))F(v(\psi(t)))}{\lambda(v(\psi(t)))} = \\ &= F(v(\psi(t))) = F(u(t)). \end{aligned}$$

La condizione di bordo segue valutando  $u$  in 0:

$$u(0) = v(\psi(0)) = v(t_0),$$

in quanto  $\varphi(t_0) = 0$  evidentemente.

Questo mostra che una traiettoria rispetto a  $v' = G(v)$  è anche una traiettoria rispetto a  $u' = F(u)$ . Se ora consideriamo  $\mu(x) = \frac{1}{\lambda(x)}$  e applichiamo quanto detto osservando che  $F(x) = \mu(x)G(x)$  avremo anche l'altra inclusione.  $\square$

**Proposizione 6.46** (Derivata lungo una traiettoria).

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  e  $E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

Consideriamo il sistema  $u' = F(u)$ . La derivata di  $E$  lungo le traiettorie del campo  $F$  è data da

$$\frac{d}{dt}(E(u(t))) = \nabla E(u(t)) \cdot u'(t) = \nabla E(u(t)) \cdot F(u(t)).$$

**Definizione 6.47** (Derivata lungo le traiettorie puntuale).

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  e  $E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ .

Consideriamo il sistema  $u' = F(u)$ . Definiamo la **derivata lungo le traiettorie (del sistema) puntuale** come

$$\dot{E}(x) = \nabla E(x) \cdot F(x)$$

**Definizione 6.48** (Integrale primo).

Una funzione scalare  $E \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  è un **integrale del moto** per il campo  $F$  o **integrale primo** del sistema  $u' = F(u)$  se

$$\dot{E} = 0.$$

**Definizione 6.49** (Sistema Hamiltoniano).

Sia  $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  di classe  $C^1$ . Un **sistema Hamiltoniano** è un sistema della forma

$$\begin{cases} p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{cases}.$$

**Proposizione 6.50** (Sistemi Hamiltoniani ammettono integrale primo).

Se  $\Sigma$  è il sistema Hamiltoniano definito da  $H$  allora  $H$  è un integrale primo per  $\Sigma$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$\dot{H}(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) = 0,$$

cioè  $H$  è un integrale del moto per il sistema  $\Sigma$  e questo conclude.  $\square$

### 6.3.2 Punti stazionari e di equilibrio

**Notazione 6.51.**

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  e consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = F(u) \\ u(0) = \xi \end{cases}$$

Sia  $\varphi_\xi(t)$  la soluzione del problema di Cauchy.

**Definizione 6.52** (Punti di equilibrio).

Un punto  $\xi_0$  è detto **punto di equilibrio** (o **stazionario**) se  $F(\xi_0) = 0$ .

Un punto  $\xi_0$  è detto **punto di equilibrio stabile** se per ogni  $R > 0$  esiste  $r > 0$  tale che per ogni  $\xi \in B_r(\xi_0)$  e per ogni  $t > 0$  si ha

$$|\varphi_\xi(t) - \xi_0| < R.$$

Un punto  $\xi_0$  è detto **punto di equilibrio asintoticamente stabile** se  $\xi_0$  è stabile ed esiste  $r > 0$  tale che per ogni  $\xi \in B_r(\xi_0)$  abbiamo  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\xi(t) = \xi_0$ .

Un punto  $\xi_0$  è detto **punto di equilibrio instabile** se è un punto di equilibrio e non è stabile.

*Osservazione 6.53.*

Intuitivamente un punto di equilibrio stabile è un punto per il quale posso scegliere un intorno abbastanza piccolo per il quale tutte le traiettorie passanti per questo intorno non vi si allontanano troppo. La stabilità asintotica implica non solo che le orbite rimangono limitate ma anche che convergono nel punto.

**Definizione 6.54** (Soluzioni stabili).

Una soluzione  $\varphi_{\xi_0}$  soluzione del problema di Cauchy  $u' = F(u)$ ,  $u(0) = \xi_0$  è detta **stabile** se per ogni  $R > 0$  esiste  $r > 0$  tale che per ogni  $\xi \in B_r(\xi_0)$  è definita la soluzione  $\varphi_\xi(t)$  in ogni  $t$  e

$$\|\varphi_\xi - \varphi_{\xi_0}\|_\infty < R, \quad \text{cioè } |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| < R \quad \forall t > 0.$$

Similmente  $\varphi_{\xi_0}$  è **asintoticamente stabile** se è stabile ed esiste  $r > 0$  tale che per ogni  $\xi \in B_r(\xi_0)$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi_\xi(t) - \varphi_{\xi_0}(t)| = 0$$

*Osservazione 6.55.*

ATTENZIONE. Anche se due traiettorie sono vicine non è detto che la differenza tra le loro immagini NELLO STESSO ISTANTE siano vicine, cioè  $\inf_{s \in \mathbb{R}} |\varphi_{\xi_0}(t_0) - \varphi_\xi(s)|$  piccolo non implica  $|\varphi_{\xi_0}(t) - \varphi_\xi(t)|$  piccolo.

**Definizione 6.56** (Bacino di attrazione di un intorno asintoticamente stabile).

Sia  $\xi_0$  un equilibrio asintoticamente stabile. Definiamo il **bacino di attrazione** di  $\xi_0$  come

$$\Omega_{\xi_0} = \left\{ \xi \in \Omega \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\xi(t) = \xi_0 \right\}$$

*Osservazione 6.57.*

$\Omega_{\xi_0}$  è un intorno di  $\xi_0$  per definizione di punto asintoticamente stabile.

**Proposizione 6.58** (I bacini di attrazione sono aperti).

Dato  $\xi_0$  equilibrio asintoticamente stabile,  $\Omega_{\xi_0}$  è aperto.

*Dimostrazione.*

Sia  $r > 0$  il raggio della definizione di stabilità asintotica di  $\xi_0$ .

Sia  $\xi_1 \in \Omega_{\xi_0}$  e mostriamo che  $\Omega_{\xi_0}$  ne è un intorno. Per ipotesi  $\varphi_{\xi_1}(t) \rightarrow \xi_0$ , dunque esiste  $t_0$  tale che  $\varphi_{\xi_1}(t_0) \in B_r(\xi_0)$ . Definiamo

$$\phi(x) = \varphi_x(t_0).$$

Osserviamo che  $\phi$  è continua per la **Dipendenza continua dalle condizioni iniziali**. Si ha dunque che  $\phi^{-1}(B_r(\xi_0))$  è un intorno aperto di  $\xi_1$ .

Per concludere basta mostrare che  $\phi^{-1}(B_r(\xi_0)) \subseteq \Omega_{\xi_0}$ :

dato  $\xi \in \phi^{-1}(B_r(\xi_0))$ , per **Esistenza e Unicità Locale / Cauchy-Lipschitz** abbiamo

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_{\varphi_\xi(t_0)}(t - t_0)$$

in quanto soluzioni dello stesso problema di Cauchy. Dunque

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\xi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{\varphi_\xi(t_0)}(t - t_0) = \xi_0,$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che  $\varphi_\xi(t_0) \in B_r(\xi_0) \subseteq \Omega_{\xi_0}$ . □

Il seguente risultato permette di stabilire se le traiettorie sono limitate o meno nel caso di  $\mathbb{R}^2$ :

**Teorema 6.59** (Teorema di Poincaré-Bendixon).

Sia  $n = 2$ ,  $y' = f(y)$ ,  $f \in C^1(A)$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Supponiamo che

1. esiste  $K \subseteq A$  compatto invariante, cioè  $y(x_0) \in K \implies y(x) \in K$  per ogni  $x > x_0$
2.  $f(y) \neq 0$  per ogni  $y \in K$

Allora esiste una soluzione periodica di  $y' = f(y)$  a supporto in  $K$ .

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

## Funzioni di Lyapunov

**Definizione 6.60** (Funzione di Lyapunov).

Dato  $\Omega$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\xi_0 \in \Omega$  e  $F(\xi_0) = 0$  allora  $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$  si dice **funzione di Lyapunov** per il problema di Cauchy  $u' = F(u)$ ,  $u(0) = \xi$  se valgono le seguenti condizioni:

1.  $V(\xi_0) = 0$
2.  $V(x) > 0$  per ogni  $x \neq \xi_0$
3.  $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot F(x) \leq 0$ .

**Proposizione 6.61** (Funzioni di Lyapunov e stabilità degli equilibri).

Dato  $\Omega$  aperto,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\xi_0 \in \Omega$  e  $F(\xi_0) = 0$  allora

- se  $\xi_0$  ammette una funzione di Lyapunov  $V$  allora è stabile e
- se  $\xi_0$  ammette una funzione di Lyapunov  $V$  e

$$\forall x \neq \xi_0 \quad \dot{V}(x) < 0$$

allora  $\xi_0$  è anche asintoticamente stabile.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $\xi_0 = 0$  e sia  $V$  la funzione di Lyapunov per il sistema rispetto a  $\xi_0$ .

\*) Sia  $R > 0$  tale che  $B_R(0) \subseteq \Omega$  e definiamo

$$m = \min_{|x|=R} V(x) > 0.$$

Sappiamo che  $m$  è positivo perché  $0 \notin \partial B_R(0)$  per  $R > 0$ .

Fissiamo  $\varepsilon \in (0, m)$  e sia  $r \in (0, R)$  tale che

$$B_r(0) \subseteq \{x \mid V(x) < \varepsilon\},$$

che esiste perché  $V$  è continua,  $V(0) = 0$  e  $\{x \mid V(x) < \varepsilon\} = V^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ , che è aperto perché preimmagine di aperto tramite continua.

Fissiamo  $\xi \in B_r(0)$  e definiamo  $\psi(t) = V(\varphi_\xi(t))$ . Osserviamo che

$$\psi'(t) = \nabla V(\varphi_\xi(t)) \cdot \varphi'_\xi(t) = \nabla V(\varphi_\xi(t)) \cdot F(\varphi_\xi(t)) = \dot{V}(\varphi_\xi(t)) \leq 0,$$

dunque  $\psi$  è debolmente decrescente. Poiché  $\xi$  è tale che  $V(\xi) < \varepsilon$  e  $\varphi_\xi(0) = \xi$  si ha che per ogni  $t > 0$  abbiamo  $V(\varphi_\xi(t)) = \psi(t) < \varepsilon$ , dunque

$$\varphi_\xi(t) \subseteq \{x \mid V(x) < \varepsilon\}.$$

In particolare, poiché  $\varepsilon < m = \min_{|x|=R} V(x)$ , si ha che  $\varphi_\xi(t)$  non attraversa  $\{|x| = R\}$ , ma dato che  $\xi \in B_r(0) \subsetneq B_R(0)$  abbiamo che la traiettoria è limitata da  $B_R(0)$ .

\*) Sia  $\xi \in B_r(0) \subseteq \Omega$  e definiamo

$$\psi(t) = V(\varphi_\xi(t)).$$

Con un conto analogo a prima, dall'ipotesi  $\dot{V}(x) < 0$ , ricaviamo che  $\psi' < 0$ . Definiamo

$$c_0 = \inf_{t \geq 0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t).$$

Affermiamo che  $c_0 \leq 0$ :

Se per assurdo  $c_0 > 0$  allora  $\{V < c_0\}$  sarebbe un aperto contenente 0, dunque esisterebbe

$\delta > 0$  tale che  $B_\delta(0) \subseteq \{V < c_0\}$ . Poiché  $\psi$  è strettamente decrescente  $\psi(t) > c_0$ , dunque  $\varphi_\xi(t) \notin B_\delta(0)$ . Definiamo

$$\sigma = \max_{\delta \leq |x| \leq r} \dot{V}(x) < 0.$$

Poiché  $\xi \in B_r(0)$  e  $\varphi_\xi(t) \notin B_\delta(0)$  osserviamo che  $\psi'(t) = \dot{V}(\varphi_\xi(t)) \leq \sigma$ , da cui  $\psi(t) \leq \psi(0) + \sigma t$ , ma poiché  $\sigma < 0$  si avrebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(0) + \sigma t = -\infty,$$

che contraddice l'ipotesi  $\psi(t) \geq c_0$ .

Abbiamo dunque mostrato che  $c_0 \leq 0$ . D'altronde sappiamo che  $c_0 = \inf \psi(t)$  e  $\psi(t) = V(\varphi_\xi(t)) \geq 0$  per definizione di funzione di Lyapunov, quindi  $c_0 = 0$ .

Da questo segue che  $\psi(t) \rightarrow c_0 = 0$ , cioè  $V(\varphi_\xi(t)) \rightarrow 0$ . Dato che  $V(x) > 0$  per ogni  $x \neq 0$  si dovrà avere per continuità di  $V$  che  $\varphi_\xi(t) \rightarrow 0$ , cioè  $0$  è equilibrio asintoticamente stabile.  $\square$

**Proposizione 6.62** (Criterio di instabilità).

Sia  $\xi_0$  un punto di equilibrio per il sistema  $u' = F(u)$ . Se esiste  $W \in C^1(\Omega)$  tale che

1.  $W(\xi_0) = 0$  ed esiste una successione  $\xi_k \rightarrow \xi_0$  tale che  $W(\xi_k) > 0$
2.  $\dot{W}(x) > 0$  per ogni  $x \neq \xi_0$

allora  $\xi_0$  è instabile.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $\xi_0 = 0$ . Sia  $R > 0$  fissato e mostriamo che per ogni  $k \in \mathbb{N}$  abbiamo che  $\varphi_{\xi_k}(t)$  esce da  $B_R(0)$  per qualche  $t > 0$ . Fissiamo  $k$ . Poiché  $\dot{W} > 0$  si ha che  $W(\varphi_{\xi_k}(t))$  è crescente in  $t$ . Dato che  $W(0) = 0$  e  $W(\xi_k) > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $W(x) < W(\xi_k)$  per ogni  $x \in B_\delta(0)$ . In particolare esiste  $\delta$  tale che

$$\varphi_{\xi_k}(t) \notin B_\delta(0).$$

Poniamo  $\sigma = \min_{\delta \leq |x| \leq R} \dot{W}(x) > 0$  e osserviamo che se  $\varphi_{\xi_k}(t) \in B_R(0)$  allora

$$W(\varphi_{\xi_k}(t)) \geq W(\xi_k) + \sigma t.$$

Poiché  $\sigma > 0$  si ha che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} W(\xi_k) + \sigma t = +\infty$ , ma allora  $\varphi_{\xi_k}(t)$  non rimane sempre in  $B_R(0)$  dato che  $W|_{B_R(0)}$  ammette massimo per il **Teorema di Weierstrass**.  $\square$

### 6.3.3 Sistema linearizzato

**Definizione 6.63** (Punto stazionario iperbolico).

Dato il sistema  $u' = F(u)$ , se  $\xi_0$  è un punto di equilibrio tale che  $\Re(\lambda) \neq 0$  per ogni  $\lambda \in Sp(\mathcal{D}F(\xi_0))$  allora  $\xi_0$  è detto un **punto stazionario iperbolico**.

**Teorema 6.64** (Teorema di Linearizzazione / Hartman-Grobman).

Consideriamo il sistema  $u' = F(u)$  con  $F \in C^1(\Omega)$ . Sia  $\xi_0$  un punto stazionario iperbolico. Allora esiste un intorno  $U$  di  $\xi_0$  e  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  omeomorfismo tale che  $\Phi(\xi_0) = 0$  e

$$z_{\Phi(\xi)}(t) \doteq \Phi(\varphi_\xi(t)) \text{ risolve il sistema } \begin{cases} z' = \mathcal{D}F(\xi_0)z \\ z(0) = \Phi(\xi) \end{cases}.$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO.  $\square$

*Osservazione 6.65.*

In generale  $\Phi$  è Hölder ma non  $C^1$ , in particolare non è un diffeomorfismo. Il problema è la continuità nel punto fisso, infatti si può mostrare che ignorando il centro ma rimanendovi vicini abbiamo diffeomorfismi tra le traiettorie del sistema e del linearizzato.

**Definizione 6.66** (Sistema linearizzato).

Dato un sistema  $u' = F(u)$  e fissato  $\xi_0$  definiamo il **sistema linearizzato** in  $\xi_0$  come

$$z' = \mathcal{D}F(\xi_0)z.$$

*Osservazione 6.67.*

Intuitivamente il **Teorema di Linearizzazione / Hartman-Grobman** ci dice che un sistema si comporta come il suo linearizzato in un intorno di un punto stazionario iperbolico.

Dimostriamo adesso una versione più debole del **Teorema di Linearizzazione / Hartman-Grobman** che ci permette di stabilire se un punto di equilibrio è asintoticamente stabile o instabile in base agli autovalori del sistema linearizzato.

**Teorema 6.68** (Teorema di Linearizzazione per punti di equilibrio).

Consideriamo il sistema  $u' = F(u)$  e sia  $\xi_0$  un punto di equilibrio ( $F(\xi_0) = 0$ ). Poniamo  $A = \mathcal{D}F(\xi_0)$  e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori di  $A$ . Allora

1. Se  $\Re(\lambda_i) < 0$  per ogni  $\lambda_i$  allora  $\xi_0$  è asintoticamente stabile.
2. Se esiste  $\lambda_i$  tale che  $\Re(\lambda_i) > 0$  allora  $\xi_0$  è instabile.

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità supponiamo  $\xi_0 = 0$  e scriviamo

$$F(x) = F(0) + Ax + R(x) = Ax + R(x)$$

con  $R(x) = O(x^2)$ .

Data la laboriosità della dimostrazione generale tratteremo solo il caso di autovalori interamente reali e  $A$  diagonalizzabile.

1) Supponiamo che  $A$  abbia autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (per ipotesi  $\lambda_i < 0$ ) e che

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = J$$

Sia  $x(t) = Bu(t)$ . Osserviamo allora che

$$u' = F(u) \iff x' = Bu' = BAu + BR(u) = BAB^{-1}Bu + BR(B^{-1}x) = Jx + \tilde{R}(x),$$

dove  $\tilde{R}(x) = BR(B^{-1}u)$  che è un  $O(x^2)$ . Ci siamo dunque ricondotti al caso con differenziale diagonale.

Osserviamo che  $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$  è una funzione di Lyapunov per il sistema, quindi per (6.61) abbiamo che 0 asintoticamente stabile:

$V(0) = 0$  Ovvio

$\overline{V(x) > 0 \text{ per } x \neq 0}$  Ovvio

$\underline{V(x) < 0 \text{ per } x \neq 0}$  In realtà ci basta mostrare questo punto solo per un intorno di 0 dato che la stabilità è una proprietà locale. Sia  $\mu = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |\lambda_i|$ . Osserviamo che

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V(x) \cdot F(x) \stackrel{\nabla V = x}{=} x \cdot (Jx + \tilde{R}(x)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \tilde{R}(x) \cdot x \stackrel{\lambda_i \leq -\mu < 0}{\leq} \\ &\leq -\mu |x|^2 + o(|x|^2) \leq \\ &\leq |x|^2 (-\mu + o(1)) \stackrel{\text{in opportuno intorno}}{\leq} \\ &\leq -\frac{\mu}{2} |x|^2 < 0. \end{aligned}$$

Accenno del caso generale: Vogliamo comunque mostrare che  $\frac{1}{2}|x|^2$  di Lyapunov. L'unico passaggio che cambia è la dimostrazione che  $\dot{V}(x) < 0$ , dove non vale più che  $x^\top Jx = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ . Per risolvere questo problema vogliamo trovare una forma per  $J$  a meno di coniugio assuma questo valore eccetto che per un termine che possiamo rendere abbastanza piccolo.

Portiamo  $A$  in forma normale di Jordan reale e coniughiamo in modo tale da moltiplicare gli 1 e i blocchi  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  per una costante  $\varepsilon$  arbitraria. Per esempio nel caso del blocco di Jordan coniughiamo per

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^n \end{pmatrix}.$$

A questo punto  $x^\top Jx = \sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i) x_i^2 + O(\varepsilon|x|^2)$  e concludiamo scegliendo  $\varepsilon$  abbastanza piccolo.

2) Supponiamo  $\lambda_i$  reali e non nulli. Supponiamo nuovamente  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  con

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n,$$

dove uno tra i  $\lambda_j$  per  $j > k$  è il  $\lambda_i$  dell'ipotesi. Sia  $\mu = \min(|\lambda_k|, |\lambda_{k+1}|)$  il modulo minimo. Sia

$$W(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i \leq k} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \geq k+1} x_i^2$$

e osserviamo che  $W$  soddisfa le condizioni per il criterio di instabilità (6.62):

$W(0) = 0$ ) Stiamo sommando entrate nulle.

Successione) Basta considerare una successione tipo

$$\xi_k = \left( 0, \dots, 0, \frac{1}{k} \right)^\top.$$

Questa tende a 0, quindi definitivamente appartiene a  $\Omega$  aperto contenente 0 e osserviamo che

$$W(\xi_k) = \frac{1}{2k^2} > 0.$$

$\dot{W}(x) > 0$  per  $x \neq 0$ ) Come per il primo punto è sufficiente trovare un intorno di 0 per il quale la tesi vale. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \dot{W}(x) &= \nabla W(x) \cdot (Ax + R(x)) = \\ &= \sum_{i \leq k} (-\lambda_i) x_i^2 + \sum_{i \geq k+1} \lambda_i x_i^2 + o(|x|^2) \geq \\ &\geq \mu |x|^2 + o(|x|^2) \stackrel{\text{opportuno intorno}}{\geq} \\ &\geq \frac{\mu}{2} |x|^2 > 0. \end{aligned}$$

Accenno al caso generale: Come per il punto precedente, l'idea è coniugare la forma normale di Jordan reale in modo da mantenere la stima appena trovata.  $\square$

### 6.3.4 Sistemi bidimensionali autonomi

**Definizione 6.69** (Equazioni esatte).

Siano  $f, g$  continue. L'equazione

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

è detta **esatta** se la forma  $\omega = gdx - fdy$  è esatta, cioè se esiste  $U(x, y)$  potenziale di  $\omega$ .

**Proposizione 6.70** (Soluzioni implicite di equazioni esatte).

Se  $x, y, f, g$  definiscono una equazione come sopra, dove  $x$  e  $y$  sono funzioni di  $t$ . Se l'equazione è esatta allora esiste  $U \in C^1$  tale che  $g(x, y) = U_x$ ,  $f(x, y) = -U_y$  e  $U(x(t), y(t))$  è costante.

*Dimostrazione.*

Sia  $U$  il potenziale dell'equazione. Da questo le prime due condizioni sono la definizione di esattezza.

Si ha che  $U$  è costante in  $t$  perché ha derivata nulla:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U(x(t), y(t))) &= U_x(x, y)x' + U_y(x, y)y' = \\ &= g(x, y)x' - f(x, y)y' = \\ &= g(x, y)f(x, y) - f(x, y)g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

□

**Proposizione 6.71** (Condizione sulle componenti per sistema bidimensionale lineare).

Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

le componenti  $(x(t), y(t))$  della soluzione del problema di Cauchy corrispondente al sistema con condizioni iniziali  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$  rispettano la seguente equazione differenziale:

$$u'' - (a + d)u' + (ad - bc)u = 0.$$

*Dimostrazione.*

Osserviamo che

$$x'' = ax' + by' = ax' + bcx + dby = ax' + bcx + d(x' - ax) = (a + d)x' + (bc - da)x$$

come volevamo. Similmente troviamo la tesi riscrivendo  $y''$ . □

*Osservazione 6.72.*

L'equazione  $u'' - (a + d)u' + (ad - bc)u$  ammette più soluzioni del sistema originale. Per risolvere un problema di cauchy potrebbe essere necessario calcolare anche  $x'(0)$  e  $y'(0)$ .

*Osservazione 6.73.*

Il polinomio  $t^2 - (a + d)t + (ad - bc)$  è il polinomio caratteristico della matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  che rappresenta il sistema.

*Osservazione 6.74.*

Se  $M$  come sopra ha traccia nulla ( $a + d = 0$ ) allora il sistema è esatto.

*Dimostrazione.*

Consideriamo la forma

$$\omega = (cx - ay)dx - (ax + by)dy.$$

Osserviamo che

$$U(x, y) = \frac{c}{2}x^2 - axy - \frac{b}{2}y^2$$

è una sua primitiva. □

## Capitolo 7

# Misure e distanza di Hausdorff

### 7.1 Misure di Hausdorff

Abbiamo dato una definizione per le  $k$ -superfici. Sviluppiamo più astrattamente la teoria.

**Notazione 7.1.**

Ricordiamo che  $\omega_k$  indica il volume  $k$ -dimensionale della palla unitaria in  $\mathbb{R}^k$ , cioè

$$\omega_k = |B_{\mathbb{R}^k}(0, 1)|_{\mathbb{R}^k}.$$

Ricordiamo (4.90) che

$$\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)},$$

dove  $\Gamma$  è la funzione gamma di Eulero

**Definizione 7.2** (Misura di Hausdorff).

Sia  $k \in [0, +\infty)^1$  e  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . La quantità

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^k(E),$$

dove

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(E_i)^k \mid \text{diam}(E_i) \leq \delta, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

si dice **misura di Hausdorff  $k$ -dimensionale** di  $E$

*Osservazione 7.3.*

La quantità

$$\omega_k \frac{\text{diam}(E_i)^k}{2^k}$$

è l'area  $k$ -dimensionale del disco  $B_r \subseteq \mathbb{R}^k$  con raggio  $r = \frac{\text{diam}(E_i)}{2}$ .

L'idea della definizione è ricoprire in modo più efficiente possibile (estremo inferiore) l'insieme con degli insiemi contenuti in una palla di diametro piccolo e di sommare i volumi così ottenuti.

*Osservazione 7.4.*

Se  $\delta_1 \leq \delta_2$  allora  $\mathcal{H}_{\delta_1}^k(E) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^k(E)$ , da cui

$$\mathcal{H}^k(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(E)$$

---

<sup>1</sup>SULLA BUONA DEFINIZIONE: è valido imporre  $k$  non intero se consideriamo come definizione di  $\omega_k$  la formula di (4.90) in astratto.

*Osservazione 7.5* (Misura di Hausdorff sferica).

Se imponiamo  $E_i$  palla al posto di sottoinsieme troviamo la **misura di Hausdorff sferica**

$$\mathcal{S}^k(E) \geq \mathcal{H}^k(E)$$

**Definizione 7.6** (Misura metrica).

Una misura  $\mu$  su uno spazio metrico si dice **metrica** se per ogni  $A, B$  disgiunti si ha

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

**Proposizione 7.7.**

Se  $\mu$  è una misura metrica,  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  (poniamo  $A = \bigcup A_n$ ) e  $\text{dist}(A_n, A \setminus A_{n+1}) > 0$  per ogni  $n$  allora

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \sup \mu(A_n).$$

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

**Proposizione 7.8.**

Se  $\mu$  è una misura metrica allora i chiusi sono  $\mu$ -misurabili

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO □

**Teorema 7.9** (Proprietà della misura di Hausdorff).

Valgono le seguenti affermazioni

1.  $\mathcal{H}^k$  è una misura esterna in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , cioè  $\mathcal{H}^k|_{\mathcal{M}}$  è una misura di Borel
2.  $\mathcal{H}^0(E) = \#E$
3.  $\mathcal{H}^n|_{\mathcal{M}}$  è la misura di Lebesgue
4. Se  $k > k'$  e  $\mathcal{H}^k(E) > 0$  allora  $\mathcal{H}^{k'}(E) = +\infty$ .  
Viceversa se  $\mathcal{H}^{k'}(E) \in \mathbb{R}$  allora  $\mathcal{H}^k(E) = 0$ .  
In particolare se  $k > n$  allora  $\mathcal{H}^k(E) = 0$  per ogni  $E \subseteq \mathbb{R}^n$
5. Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  è  $C$ -lipschitziana allora

$$\mathcal{H}^k(f(E)) \leq C^k \mathcal{H}^k(E)$$

*Dimostrazione.*

1)

Monotonia) Se  $E \subseteq F$  allora  $\mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \mathcal{H}_\delta^k(F)$  in quanto un ricoprimento di  $F$  (con diametro maggiorato da  $\delta$ ) è un ricoprimento di  $E$  (con diametro maggiorato da  $\delta$ ), quindi quando calcoliamo l'estremo inferiore per  $E$  abbiamo più termini. Da questo segue che  $\mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \mathcal{H}_\delta^k(F)$  e quindi  $\mathcal{H}^k(E) \leq \mathcal{H}^k(F)$ .

$\sigma$ -Subadditività) Se  $F_j \subseteq \mathbb{R}^n$  allora  $\mathcal{H}_\delta^k\left(\bigcup_j F_j\right) \leq \sum_j \mathcal{H}_\delta^k(F_j)$ , in quanto se  $\{E_{ij}\}_i$  è un ricoprimento di  $F_j$  abbiamo che  $\{E_{ij}\}_{i,j}$  è un ricoprimento di  $\bigcup_j F_j$ . Da questo segue che  $\mathcal{H}^k\left(\bigcup_j F_j\right) \leq \sum_j \mathcal{H}^k(F_j)$ .

Questo mostra che  $\mathcal{H}^k$  è una misura esterna, che possiamo trasformare in misura grazie al **Teorema di Carathéodory**. Sia  $\mathcal{M}$  l'insieme dei misurabili dato dal teorema.

È di borel) Mostriamo che  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M}$ , cioè che

$$\mathcal{H}^k(E) = \mathcal{H}^k(A \cap E) + \mathcal{H}^k(E \setminus A)$$

per ogni  $A$  boreliano e per ogni  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Osserviamo che se  $dist(E, F) > 0$  e  $0 < \delta < \frac{1}{2}dist(E, F)$  allora

$$\mathcal{H}_\delta^k(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^k(E) + \mathcal{H}_\delta^k(F),$$

da cui  $\mathcal{H}^k(E \cup F) = \mathcal{H}^k(E) + \mathcal{H}^k(F)$ , cioè  $\mathcal{H}^k|_{\mathcal{M}}$  è una misura metrica.

Per la proposizione (7.8) si ha che ogni chiuso è  $\mathcal{H}^k$ -misurabile secondo Carathéodory. A questo punto abbiamo che  $\mathcal{M}$  contiene i chiusi e in quanto  $\sigma$ -algebra deve contenere i boreliani.

2) Per la monotonia di  $\mathcal{H}^0$  è sufficiente verificare che

$$\mathcal{H}^0\left(\bigcup_{i=1}^N \{x_i\}\right) = N,$$

dove  $x_i$  sono punti distinti. Osserviamo che se  $\delta < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |x_i - x_j|$  si ha che se  $\{E_i\}_{i \in J}$  è un ricoprimento con diametro limitato da  $\delta$  abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^0\left(\bigcup \{x_i\}\right) &= \inf \left\{ \sum_{i \in J} diam(E_i)^0 \mid \{E_i\}_{i \in J} \text{ ricoprimento di } \bigcup_{i=1}^N \{x_i\} \right\} = \\ &= \inf \left\{ \#J \mid \{E_i\}_{i \in J} \text{ ricoprimento di } \bigcup_{i=1}^N \{x_i\} \right\} = N \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che  $\#J \geq N$  per  $\delta$  abbastanza piccolo ed evidentemente  $N$  insiemi bastano (per esempio  $B_\delta(x_i)$ ).

3) Osserviamo che  $\mathcal{H}^n|_{\mathcal{M}}$  è una misura di Borel invariante per traslazioni. Osserviamo inoltre che i compatti di  $\mathbb{R}^n$  sono limitati e che  $\mathcal{H}^n$  è finita su insiemi limitati ( $\mathcal{H}^n(E) \leq |B(0, diam(E))|$  per costruzione). Allora per l'unicità della misura di Lebesgue (3.45) si ha che

$$\mathcal{H}^n|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = c\mathcal{L}.$$

Per concludere basta verificare che  $\mathcal{H}^n(B_1) = |B_1| = \omega_n$  (CHE EVITIAMO DI FARE).

4) Basta mostrare la prima delle tre affermazioni. Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\{E_i\}_i$  un ricoprimento di  $E$  con diametro limitato da  $\delta$ . Osserviamo che

$$diam(E_i)^k < \delta^{k-k'} diam(E_i)^{k'},$$

dunque

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) < \underbrace{\frac{\omega_k}{2^k} \frac{2^{k'}}{\omega_{k'}}}_{\doteq c_{k,k'} > 0} \delta^{k-k'} \mathcal{H}_\delta^{k'}(E).$$

Passando al limite per  $\delta \rightarrow 0^+$  si ha che

$$\mathcal{H}^{k'}(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{k'}(E) > \frac{\mathcal{H}^k(E)}{c_{k,k'}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^{k-k'}} = +\infty,$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che  $\mathcal{H}^k(E) > 0$  per ipotesi e  $k - k' > 0$ .

5) Se  $f$  è  $C$ -lipschitz e  $\{E_i\}_i$  è un ricoprimento di  $E$  allora  $\{f(E_i)\}$  è un ricoprimento di  $f(E)$  e  $diam(f(E_i)) \leq C diam(E_i)$  per lipschitzianità.

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^k(f(E_i)) &\leq \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_i diam(f(E_i))^k \mid \{E_i\} \text{ ricoprimento, } diam(E_i) < \delta \right\} \leq \\ &\leq \frac{\omega_k}{2^k} C^k \inf \left\{ \sum_i diam(E_i)^k \mid \{E_i\} \text{ ricoprimento, } diam(E_i) < \delta \right\} = \\ &= C^k \mathcal{H}_\delta^k(E_i). \end{aligned}$$

Passando al limite in  $\delta$  abbiamo la tesi. □

### 7.1.1 Integrazione

*Osservazione 7.10.*

Se  $k < n$  allora  $\mathcal{H}^k$  non è finita sui compatti. In particolare non è  $\sigma$ -finita per questioni di cardinalità.

**Definizione 7.11** (Insieme  $\sigma$ -finito).

Sia  $\mu$  una misura di borel. Un insieme  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  si dice  $\sigma$ -finito se  $\mu|_{\mathcal{B}(E)} \doteq \mu|_E$  è una misura  $\sigma$ -finita.

**Definizione 7.12** (Integrale).

Sia  $E$  un insieme  $\sigma$ -finito per  $\mathcal{H}^k$  e sia  $f$  misurabile per  $\mathcal{H}^k|_E$ <sup>2</sup>. Definiamo l'integrale di  $f$  su  $E$  rispetto a  $\mathcal{H}^k$  come

$$\int_E f d\mathcal{H}^k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mathcal{H}^k|_E.$$

**Teorema 7.13.**

Se  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$  è una superficie compatta  $C^1$   $k$ -dimensionale e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è continua allora  $\Sigma$  è  $\sigma$ -finito per  $\mathcal{H}^k$  e

$$\int_{\Sigma} f = \int_{\Sigma} f d\mathcal{H}^k,$$

dove il primo integrale è inteso con la definizione per parametrizzazione.

*Dimostrazione.*

NON DATA DURANTE IL CORSO. □

## 7.2 Distanza di Hausdorff

**Notazione 7.14** (Spazio dei compatti).

Dato  $(X, d)$  uno spazio metrico, poniamo

$$K(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ compatto, } K \neq \emptyset\}.$$

**Definizione 7.15** (Distanza di Hausdorff).

Dotiamo  $K(X)$  della struttura di spazio metrico con la seguente distanza, detta **distanza di Hausdorff**:

$$d_{\mathcal{H}} : \begin{array}{ccc} K(X) \times K(X) & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ (C_1, C_2) & \longmapsto & \max \left( \max_{x \in C_1} d(x, C_2), \max_{x \in C_2} d(x, C_1) \right) \end{array},$$

dove ricordiamo che  $d(x, C) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ .

**Teorema 7.16** (I compatti con distanza di Hausdorff sono spazio metrico).

La coppia  $(K(X), d_{\mathcal{H}})$  è uno spazio metrico.

*Dimostrazione.*

Verifichiamo gli assiomi di distanza:

$d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) \geq 0$ ) Segue dal fatto che  $d(x, y) \geq 0$ .

$d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) = 0 \iff C_1 = C_2$ ) Se  $C_1 = C_2$  allora per ogni  $x \in C_1$  si ha  $0 \leq d(x, C_2) \leq d(x, x) = 0$  e similmente scambiando i ruoli, dunque  $d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) = 0$ .

Viceversa se  $d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) = 0$  allora per definizione

$$\max_{x \in C_1} d(x, C_2) = \max_{y \in C_2} d(y, C_1) = 0.$$

<sup>2</sup>per esempio  $f$  continua o  $f$  boreliana

Dalla prima segue che  $C_1 \subseteq \overline{C_2} = C_2^3$  per (1.49) e dalla seconda similmente  $C_2 \subseteq C_1$ , dunque  $C_1 = C_2$ .

*Simmetrica*) Evidente

*Disuguaglianza triangolare*) Siano  $C_1, C_2, C_3$  compatti. Per ogni  $x \in C_1$  esiste  $y \in C_2$  tale che  $d(x, y) \leq d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$  e per tale  $y$  esiste  $z \in C_3$  tale che  $d(y, z) \leq d_{\mathcal{H}}(C_2, C_3)$ , dunque

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) + d_{\mathcal{H}}(C_2, C_3).$$

Segue dunque che

$$d(x, C_3) = \inf_{z \in C_3} d(x, z) \leq d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) + d_{\mathcal{H}}(C_2, C_3),$$

da cui passando all'estremo superiore

$$\max_{x \in C_1} d(x, C_3) \leq d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) + d_{\mathcal{H}}(C_2, C_3).$$

Per simmetria vale la disuguaglianza cercata anche per  $\max_{z \in C_3} d(z, C_1)$  e dunque abbiamo la tesi.  $\square$

**Lemma 7.17.**

$$\sup_{x \in A} d(x, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B) \}$$

*Dimostrazione.*

Poniamo:  $d_0 = \sup_{x \in A} d(x, B)$  e  $\varepsilon_0 = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B) \}$ : per dimostrare il lemma proveremo che  $\forall \varepsilon < \varepsilon_0, d_0 \geq \varepsilon$ , e che  $\forall \varepsilon > \varepsilon_0, d_0 \leq \varepsilon$ .

Se  $\varepsilon < \varepsilon_0$  si ha, per definizione, che  $A \not\subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B)$ , dunque esiste un  $x \in A$  tale che  $d(x, B) \geq \varepsilon$ ; per definizione si ha che:  $\varepsilon \leq d(x, B) \leq d_0$ .

Se invece poniamo  $\varepsilon > \varepsilon_0$  avremo che  $A \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B)$ , ovvero che, comunque scelto  $x$  appartenente ad  $A$ ,  $d(x, B) < \varepsilon$ , ovvero che, per passaggio all'estremo superiore su  $A$ ,  $d_0 \leq \varepsilon$ , che è quanto rimaneva da provare.  $\square$

**Proposizione 7.18** (Caratterizzazione della distanza di Hausdorff con intorni tubolari).  
 $d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B) \text{ e } B \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(A) \}$ .

*Dimostrazione.*

Per definizione sappiamo che

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in B} d(x, A), \sup_{x \in A} d(x, B) \right\}.$$

Per il lemma precedente possiamo riscrivere l'uguaglianza come:

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max \{ \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(B) \}, \inf \{ \varepsilon > 0 \mid B \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon}(A) \} \}.$$

Questa scrittura è la nostra tesi, infatti se ad esempio il più grande dei due estremi inferiori fosse un  $\varepsilon_1$  tale per cui  $A \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon_1}(B)$  allora per tutti i valori  $a \in A$   $d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b) < \varepsilon_1$ , ma quindi, questo si può leggere come  $\inf_{a \in A} d(b, a) = d(b, A) < \varepsilon_1$  per tutti i  $b \in B$ , ovvero  $\varepsilon_1$  è tale che  $B \subseteq \mathcal{N}_{\varepsilon_1}(A)$ .  $\square$

**Teorema 7.19** (Ereditarietà per la distanza di Hausdorff).

*Dato*  $(X, d)$  spazio metrico, valgono le seguenti relazioni:

1. Se  $(X, d)$  è completo allora  $(K(X), d_{\mathcal{H}})$  è completo.
2. Se  $(X, d)$  è totalmente limitato allora  $(K(X), d_{\mathcal{H}})$  è totalmente limitato.

<sup>3</sup>Verso universale del Teorema di Heine-Borel

3. Se  $(X, d)$  è compatto, allora  $(K(X), d_{\mathcal{H}})$  è compatto.

*Dimostrazione.*

1) Sia  $A_n$  una successione di Cauchy in  $K(X)$ . Siccome da un certo indice in poi possiamo maggiorare la distanza tra due termini della successione a piacere, senza perdita di generalità possiamo considerare  $d_{\mathcal{H}}(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$ . In generale, per  $k > n$  si avrà

$$d_{\mathcal{H}}(A_n, A_k) < \sum_{j=n}^{+\infty} 2^{-j} \leq \frac{2}{2^n}.$$

Definiamo

$$A = \{x \in X \mid \exists x_k \in A_k \text{ t.c. } x_k \rightarrow x\} \stackrel{(1.23)}{=} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{k \geq n} A_k}$$

e verifichiamo che  $A \in K(X)$  e  $d_{\mathcal{H}}(A_k, A) \rightarrow 0$ :

*Non vuoto*) Fissiamo  $x_0 \in A_0$ . Poiché  $d_{\mathcal{H}}(A_0, A_1) < 2^{-0}$  si ha che  $d(x_0, A_1) < 2^{-0}$  e quindi esiste  $x_1 \in A_1$  tale che  $d(x_0, x_1) \leq 2^{-0}$ . Reiterando questa procedura possiamo costruire una successione  $x_k$  con  $x_k \in A_k$  tale che  $d(x_k, x_{k+1}) \leq 2^{-k}$ . Poiché  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$  converge si ha che  $x_k$  è di Cauchy, quindi per la completezza di  $X$  ammette limite  $x$ . Per definizione di  $A$  si ha  $x \in A$ .

*A è il limite*) Per come è definita la distanza di Hausdorff dobbiamo mostrare che

$$\lim_k \max_{x \in A} d(x, A_k) = 0 \quad e \quad \lim_k \max_{y \in A_k} d(y, A) = 0.$$

\*) Affermiamo che per ogni  $x \in A$  esiste  $x_k \in A_k$  tale che  $d(x, x_k) \leq \frac{4}{2^k}$ :

Per definizione  $x = \lim_n x_n$  con  $x_n \in A_n$ . Scegliamo allora  $n > k$  tale che  $d(x, x_n) \leq \frac{2}{2^k}$ . Poiché

$$d_{\mathcal{H}}(A_n, A_{n-1}) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

si ha che esiste  $x_{n-1} \in A_{n-1}$  tale che  $d(x_{n-1}, x_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Similmente vediamo induttivamente che per ogni  $j$  intero compreso tra  $k$  e  $n-1$  inclusi esiste  $x_j \in A_j$  tale che  $d(x_j, x_{j-1}) \leq \frac{1}{2^j}$ . Allora

$$d(x_k, x) \leq d(x, x_n) + \sum_{j=k}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \frac{2}{2^k} + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{4}{2^k}.$$

Questo mostra che  $d(x, C_k) \leq \frac{4}{2^k}$ , da cui

$$\max_{x \in C} d(x, C_k) \leq \frac{4}{2^k} \xrightarrow[k]{} 0.$$

\*) Dato  $y_k \in A_k$  affermiamo che esiste  $x_k \in A$  tale che  $d(y_k, x_k) \leq \frac{2}{2^k}$ :

Come sopra, per ogni  $j \geq k$  costruiamo induttivamente  $y_j \in A_j$  tale che  $d(y_j, y_{j+1}) \leq \frac{1}{2^j}$ . Poiché la serie  $\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j}$  converge si ha che  $y_j$  è di Cauchy. Sia  $x_k \in X$  il suo limite (che esiste per completezza di  $X$ ).

Per definizione  $x_k \in A$  e

$$d(x_k, y_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} d(y_j, y_{j+1}) = \frac{2}{2^k},$$

dunque

$$\max_{y \in C_k} d_{\mathcal{H}}(y, C) \leq \frac{2}{2^k} \xrightarrow[k]{} 0.$$

*Compatto*) Osserviamo che se  $A$  è chiuso e totalmente limitato allora la tesi segue, infatti per la proposizione (1.55) da una qualsiasi successione in  $A$  possiamo estrarne una

<sup>4</sup>  $A$  è detto il **limite di Kuratowski degli**  $A_k$ .

di Cauchy, che converge in  $X$  per completezza di  $X$  e questo limite appartiene ad  $A$  per chiusura. Mostriamo dunque queste proprietà:

*chiuso*) Sia  $x_n \in A$  una successione convergente in  $X$  e sia  $x$  il suo limite. Mostriamo che  $x \in A$ : abbiamo già mostrato che  $d_{\mathcal{H}}(A, A_k) \leq \max\{\frac{4}{2^k}, \frac{2}{2^k}\} = \frac{4}{2^k}$ , quindi  $d(x_k, A_k) \leq \frac{4}{2^k}$ . Sia allora  $y_k \in A_k$  tale che  $d(x_k, y_k) \leq \frac{4}{2^k}$ . Osserviamo che  $y_k \rightarrow x$ , infatti

$$d(y_k, x) \leq d(x_k, x) + d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x) + \frac{4}{2^k} = o(1) + o(1) \rightarrow 0.$$

Poiché  $y_k \in A_k$  e  $y_k \rightarrow x$  si ha per definizione che  $x \in A$ .

*totalmente limitato*) Proviamo a costruire una  $\varepsilon$ -rete per  $A$ . Sappiamo che per ogni  $\delta > 0$  esiste  $N_\delta$  tale che per ogni  $n \geq N_\delta$  si ha  $A \subseteq \mathcal{N}_\delta(A_n)$ , in particolare per un qualche  $N$  si ha  $A \subseteq \mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{4}}(A_N)$ . Sia  $R$  una  $\frac{\varepsilon}{4}$ -rete di  $A_N$ , il quale è totalmente limitato perché compatto. Consideriamo ora

$$R' = \{r \in R \mid B_{\frac{\varepsilon}{2}}(r) \cap A \neq \emptyset\}$$

e per ogni  $r \in R'$  sia  $s_r \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(r) \cap A$ . Sia infine  $S = \{s_r \mid r \in R'\}$ . Mostriamo che  $S$  è una  $\varepsilon$ -rete di  $A$ :

Sia  $a \in A$ . Poiché  $A \subseteq \mathcal{N}_{\frac{\varepsilon}{4}}(A_N)$  si ha che  $d(a, A_N) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , quindi esiste  $x \in A_N$  tale che  $d(a, x) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Poiché  $R$  è una  $\frac{\varepsilon}{4}$ -rete di  $A_N$  si ha che esiste  $r \in R$  tale che  $x \in B_{\frac{\varepsilon}{4}}(r)$  e quindi per disuguaglianza triangolare  $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(r)$ . Questo mostra anche che  $r \in R'$ , quindi possiamo considerare  $s_r \in S$ . Osserviamo che

$$d(a, s) \leq d(a, r) + d(r, s) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

che mostra la tesi.

2) Siccome essere totalmente limitato è equivalente all'esistenza di una  $\varepsilon$ -rete sul nostro insieme, ci basta mostrare che la rete su  $X$  ne induce una su  $K(X)$ .

Sappiamo per ipotesi che, preso un  $\varepsilon$  positivo, esiste una  $\varepsilon$ -rete  $F$  di  $X$ .

Mostriamo che  $\mathcal{P}(F)$  è una  $\varepsilon$ -rete per  $K(X)$  secondo  $d_{\mathcal{H}}$ . Osserviamo che, poiché  $F$  è un insieme finito anche  $\mathcal{P}(F)$  è finito, inoltre gli elementi di  $\mathcal{P}(F)$  sono insiemi finiti di punti, che sono compatti quindi sono elementi di  $K(X)$ .

Preso  $C \in K(X)$  consideriamo

$$F_C = F \cap \mathcal{N}_\varepsilon(C) \in \mathcal{P}(F)$$

e mostriamo che  $d_{\mathcal{H}}(C, F_C) \leq \varepsilon$ :

Per costruzione  $F_C \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(C)$ , quindi per la caratterizzazione (7.18) dobbiamo solo verificare che  $C \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(F_C)$ .

Sia  $x \in C \subseteq X$ . Per definizione di  $F$  esiste  $y \in F$  tale che  $x \in B_\varepsilon(y)$ . Poiché  $x \in B_\varepsilon(y)$  si ha che  $y \in B_\varepsilon(x) \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(C)$ , dunque  $y \in F_C$  per definizione e quindi  $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(F_C)$  come voluto.

3) L'ultimo punto deriva dai primi due: per la **Caratterizzazione dei compatti in spazi metrici** sappiamo che se uno spazio è completo e totalmente limitato allora è compatto, dunque, se supponiamo  $X$  compatto, sappiamo che esso è completo e totalmente limitato, dunque, per i due punti appena dimostrati,  $(K(X), d_{\mathcal{H}})$  è completo e totalmente limitato, dunque è anche compatto.  $\square$

## 7.3 Dimensione di Hausdorff e Frattali

**Definizione 7.20** (Dimensione di Hausdorff).

Dato  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , la sua **dimensione di Hausdorff** è definita come

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{k > 0 \mid \mathcal{H}^k(E) = 0\} \in [0, n].$$

*Osservazione 7.21.*

Se  $\Sigma$  è una  $k$ -superficie  $C^1$  allora  $\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma) = k$ .

*Osservazione 7.22 (Frattali).*

Esistono insiemi  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  tali che  $\dim_{\mathcal{H}}(E) \notin \mathbb{N}$ . Insiemi di dimensione di Hausdorff non intera vengono chiamati **frattali**. Il termine “frattale” non si esaurisce a questi ma evitiamo di scendere ulteriormente nel dettaglio.

*Osservazione 7.23.*

L'insieme di Cantor e la curva di Koch sono insiemi di questo tipo.

### 7.3.1 Sistemi di Funzioni iterate

Vogliamo costruire dei frattali invocando il **Teorema delle contrazioni / Banach Cacciopoli** su  $(K(\mathbb{R}^n), d_{\mathcal{H}})$ . Cerchiamo di capire chi sono le contrazioni

*Osservazione 7.24.*

Se  $T$  è una isometria di  $\mathbb{R}^n$  allora

$$\tilde{T} : \begin{array}{ccc} K(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & K(\mathbb{R}^n) \\ K & \longmapsto & \bigcup_{x \in K} T(x) \end{array}$$

è un'isometria.

*Dimostrazione.*

Per definizione di isometria  $|T(x) - T(y)| = |x - y|$ , quindi per come è definita la distanza di Hausdorff  $d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2) = d_{\mathcal{H}}(T(C_1), T(C_2))$ .  $\square$

**Teorema 7.25** (Sistemi di Funzioni iterate hanno un unico punto fisso).

Sia  $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  per  $i \in \{1, \dots, N\}$  una famiglia di contrazioni, in particolare

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leq \mu|x - y| \quad \text{per } \mu \in (0, 1).$$

Definiamo la mappa<sup>5</sup>

$$\Phi : \begin{array}{ccc} K(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & K(\mathbb{R}^n) \\ C & \longmapsto & \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C) \end{array} .$$

Valgono le seguenti proposizioni:

1.  $\Phi$  è  $\mu$ -Lipschitziana su  $(K(\mathbb{R}^n), d_{\mathcal{H}})$ . In particolare è una contrazione.
2. Esiste un unico  $C_{\infty} \in K(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\Phi(C_{\infty}) = C_{\infty}$ .
3. Per ogni  $C \in K(\mathbb{R}^n)$  la successione ottenuta iterando  $\Phi$  su  $C$  converge a  $C_{\infty}$  in  $(K(\mathbb{R}^n), d_{\mathcal{H}})$ .

*Dimostrazione.*

Osserviamo che  $\Phi$  è ben definita perché se  $C \in K(\mathbb{R}^n)$  allora  $\varphi_i(C) \in K(\mathbb{R}^n)$  e l'unione finita di compatti (non vuoti) è un compatto (non vuoto).

1) Dati  $C_1, C_2 \in K(\mathbb{R}^n)$  si ha che se  $x \in \Phi(C_1)$  allora  $x \in \varphi_j(C_1)$  per qualche  $j$ , cioè  $x = \varphi_j(\bar{x})$  per  $\bar{x} \in C_1$ . Sia  $\bar{y} \in C_2$  tale che  $|\bar{x} - \bar{y}| \leq d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$  e poniamo  $y = \varphi_j(\bar{y})$ . Osserviamo che

$$|x - y| \leq \mu|\bar{x} - \bar{y}| \leq \mu d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2),$$

dunque  $d(x, \Phi(C_2)) \leq \mu d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$ . Simmetricamente vale anche che  $d(y, \Phi(C_1)) \leq \mu d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$  per ogni  $y \in \Phi(C_2)$ . Per definizione della distanza di Hausdorff si ha che

$$d_{\mathcal{H}}(\Phi(C_1), \Phi(C_2)) \leq \mu d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2).$$

<sup>5</sup>una unione di contrazioni come quella definita qui è detta **sistema di funzioni iterate** o **IFS**.

**Alternativamente**) Osserviamo che per ogni  $\delta > d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$  si ha che  $C_1 \subseteq \mathcal{N}_\delta(B)$ . Poiché  $\varphi_i$  è  $\mu$ -Lipschitziana abbiamo che  $\varphi_i(C_1) \subseteq \mathcal{N}_{\mu\delta}(\varphi_i(C_2))$ , da cui

$$\Phi(C_1) = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(C_1) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \mathcal{N}_{\mu\delta}(\varphi_i(C_2)) = \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(C_2)).$$

Simmetricamente ricaviamo  $\Phi(C_2) \subseteq \mathcal{N}_{\mu\delta}(\Phi(C_1))$ , da cui per la caratterizzazione (7.18) si ha che per ogni  $\delta > d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$  vale

$$d_{\mathcal{H}}(\Phi(C_1), \Phi(C_2)) \leq \mu\delta,$$

dunque passando all'estremo inferiore

$$d_{\mathcal{H}}(\Phi(C_1), \Phi(C_2)) \leq \mu d_{\mathcal{H}}(C_1, C_2)$$

come voluto.

2,3) Seguono dal punto precedente applicando il **Teorema delle contrazioni / Banach Caccioppoli**. □

**Esempio 7.26** (Curva di Koch).

Sia  $K_1 = (-1, 1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Definiamo la seguente contrazione

$$\begin{aligned} K_{n+1} = T(K_n) = & \left( \frac{1}{3}K_n + (-1, 0) \right) \cup \left( \frac{1}{3}K_n + (1, 0) \right) \cup \\ & \cup \left( R_{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{3}K_n \right) + \left( -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) \cup \left( R_{-\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{3}K_n \right) + \left( \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

La **curva di Koch** è  $K = \lim_n K_n$ , che esiste per il teorema dato che  $T$  è una Lipschitziana di costante  $\frac{1}{3}$ .

Calcoliamo  $\dim_{\mathcal{H}}(K)$ :

$$\mathcal{H}^j(K) = \frac{4}{3^j} \mathcal{H}^j(K),$$

quindi se esiste

$$\dim_{\mathcal{H}}(K) = \frac{\log 4}{\log 3} \in (1, 2).$$

Dovremmo verificare che effettivamente  $\mathcal{H}^{\frac{\log 4}{\log 3}}(K) \in (0, +\infty)$  (CHE NON FACCIAMO).

**Esempio 7.27** (Insieme di Cantor).

Osserviamo che

$$C = \left( \frac{1}{3}C \right) \cup \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C \right),$$

dunque

$$\mathcal{H}^k(C) = \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) + \frac{1}{3^k} \mathcal{H}^k(C) = \frac{2}{3^k} \mathcal{H}^k(C).$$

Se  $\mathcal{H}^k(C) \in (0, +\infty)$  allora

$$\frac{2}{3^k} = 1 \implies k = \frac{\log 2}{\log 3} \in (0, 1).$$

Dobbiamo dunque verificare che  $\mathcal{H}^{\frac{\log 2}{\log 3}}(C) \in (0, +\infty)$  (CHE NON FACCIAMO), dunque

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

# Appendice A

## Riconoscimenti

### **Autori e Collaboratori**

Sorce Francesco, Contorni Lorenzo e Allegri Federico.

### **Segnalazione Errori o possibili Miglioramenti**

Bellu Gianni, Biscaro Samuele, Bonetti Lorenzo, Buratti Mattia, Daniele Margherita, Dell'Agnello Enrico, Froli Gabriel, Gori Matteo, Jalloul Federico, Moretti Alessandro, Pasini Andrea, Vitale Giuseppe.

Ringraziamo in particolar modo *Moretti Alessandro* e *Daniele Margherita* per la quantità di errori e suggerimenti segnalati.

### **Materiale di Riferimento**

- Il corso tenuto dai proff. Novaga Matteo e Carminati Carlo nell'a.a.22/23.
- Appunti di Analisi II compilati da Simmaco Di Lillo.
- Lezioni di analisi matematica due (Nicola Fusco, Paolo Marcellini, Carlo Sbordone)